

---

# VNITŘNÍ TŘENÍ TEKUTINY A VÝVOJ MEZNÍ VRSTVY

---

*Jiří Škorpík, skorpik.jiri@email.cz*

<b>Obsah článku:</b>		
Úvod		7.3
Čtyři definice střední rychlosti proudění		7.4
Definice tloušťky mezní vrstvy		7.6
Definice viskozity a její hodnoty		7.7
Rovnice laminárního proudění – Navier-Stokesova rovnice		7.10
Tlaková ztráta v potrubí při laminárním proudění		7.12
Vývoj laminární mezní vrstvy a Reynoldsovo číslo		7.12
Střední rychlosti laminárního proudění		7.13
Kolaps laminárního proudění a vývoj turbulentního proudění		7.14
Turbulentní mezní vrstva		7.15
Zánik turbulencí		7.16
Odkazy		7.17
Přílohy		7.18

---

**Autor:** ŠKORPÍK, Jiří

**Datum vydání:** Srpen, 2023

**Název:** Vnitřní tření tekutiny a vývoj mezní vrstvy

**Název periodika:** Transformační technologie (on-line pokračující zdroj  
natransformacni-technolgie.cz; turbomachinery.education;  
stirling-engine.education; fluid-dynamics.education)

**ISSN:** 1804-8293

Copyright©Jiří Škorpík, 2023

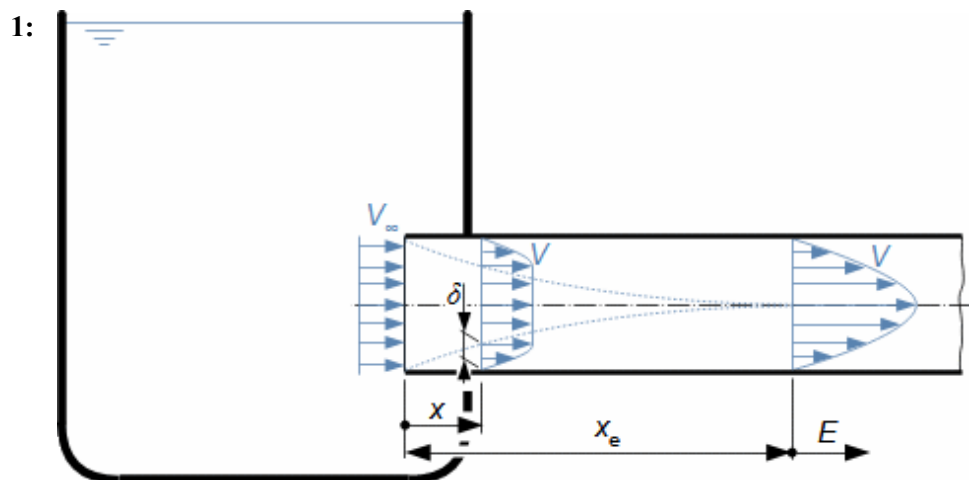
Všechna práva vyhrazena.

---

## Úvod

Vnitřní tření  
Ztrátové teplo  
Tlaková ztráta  
Rychlostní profil  
Mezní vrstva

Schopnost produkce vnitřního tření je vlastnost tekutiny, která způsobuje, že při proudění tekutiny se část její kinetické energie transformuje na vnitřní tepelnou energii tekutiny (tato část energie je dále označována jako ztrátové teplo) a přitom se zvyšuje i její entropie oproti stavu bez tření. Typickým projevem vnitřního tření je *tlaková ztráta*<sup>1</sup> při proudění kanálem a nižší rychlost proudění u okrajů kanálu a vyšší v jádru proudu – rozložení rychlosti tekutiny ve vyšetřovaném řezu kanálu nazýváme rychlostní profil. Nicméně rychlostní profil se vyvíjí postupně. Na Obrázku 1 je znázorněn postupný vývoj rychlostního profilu tekutiny v potrubí na výtoku z nádoby při působení vnitřního tření. Vliv vnitřní tření započne až na vstupu do potrubí, kde dochází ke tření tekutiny o stěny kanálu, tato ztráta kinetické energie tekutiny se šíří směrem od obtékané plochy, a tím se postupně vyvíjí rychlostní profil. Aby byla zachována kontinuita proudu, musí se na hranici mezní vrstvy a v jádru proudu rychlost zvyšovat, protože u profilu je nulová. Oblast ovlivněnou vnitřním třením nazýváme mezní vrstvou proudění. V případě uzavřených kanálů se mezní vrstvy protilehlých stran, tak jak neustále rostou, po určité délce spojí.



E-oblast plně vyvinuté mezní vrstvy.  $V_\infty$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] rychlost proudění ve vyšetřovaném místě kanálu;  $V_\infty$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] rychlost proudění na vstupu do vyšetřovaného úseku kanálu;  $x$  vzdálenost od vstupu do potrubí;  $x_e$  [m] vstupní úsek (není dokončen vývin mezní vrstvy);  $\delta$  [m] tloušťka mezní vrstvy.

Ideální tekutina

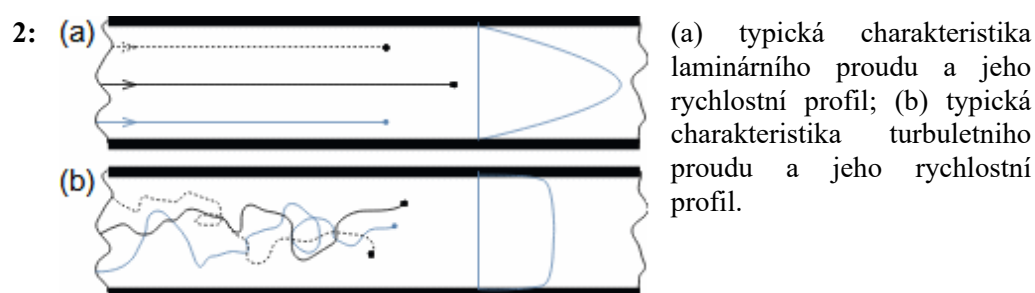
Za účelem základních výpočtů složitých úloh v proudění a porovnávání definujeme tzv. ideální tekutinu, která nemá schopnost produkovat vnitřní tření a při jejím proudění nevzniká tlaková ztráta, navíc má konstantní měrnou tepelnou kapacitu. Modely proudění s ideální tekutinou jsou k reálnému proudění tím bližší, čím je schopnost skutečné tekutiny produkovat vnitřní tření menší.

Kapalné helium  
Supratekutost

Ideální tekutina není jen matematický ideál, ale ideální tekutinou je i kapalné Helium při teplotách pod 2 K, jedná se o tzv. supratekutost [Kapica, 1982, s. 8], [Andronikašvili, 1983, s. 22-24]. Supratekutost také umožňuje existenci navzájem protiproudých proudění v jednom kanále bez vzniku tření [Kapica, 1982, s. 50].

Laminární proudění  
Turbulentní proudění

To jakým způsobem se vyvíjí mezní vrstva a tedy i rychlostní profil je dáno druhem proudění. Existují dva druhy proudění podle principu vzjemné interakce mezi částicemi proudění a přenosu kinetické energie proudu mezi nimi. Jedná se o proudění laminární a proudění turbulentní. Při laminárním proudění vytváří tekutina rovnoběžná proudová vlákna, přičemž tato vlákna po sobě klouzají (v rámci vlákna vytváří tekutina drobné víry). Tekutina v sousedních proudových vláknech se nepromíchává. Při turbulentním proudění již nelze identifikovat jednotlivá proudová vlákna. Na Obrázku 2 jsou uvedeny trajektorie částic, které jsou unášeny laminárním proudem a turbulentním proudem. Tyto částice jsou současně výrazně hmotnější než molekuly tekutiny, aby nemohla být ovlivněna Brownovým pohybem, ale současně na ně nemá významný vliv gravitační zrychlení. Fotografie z podobného experimentu je například v knize Voda v pohybu - úžas v nás: Pozorování a pokusy [Schwenk and Michael, 2017, s. 38]. Nicméně i při turbulentním proudění převládají nižší rychlosti v blízkosti stěn a vyšší v jádru proudu. O tom za jakých okolností lze očekávat laminární nebo turbulentní proudění pojednává kapitola Kolaps laminárního proudění a vývoj turbulentního proudění.



Využití teorie tření a  
mezní vrstvy  
Odpor

Teorie vnitřního tření, respektive mezní vrstvy objasňuje vznik tlakové ztráty a chování tekutiny při proudění potrubím nebo při obtékání osamocených profilů, kde proud tekutiny prostřednictvím tření vytváří aerodynamický *odpor těchto profilů*<sup>2</sup>.

### Čtyři definice střední rychlosti proudění

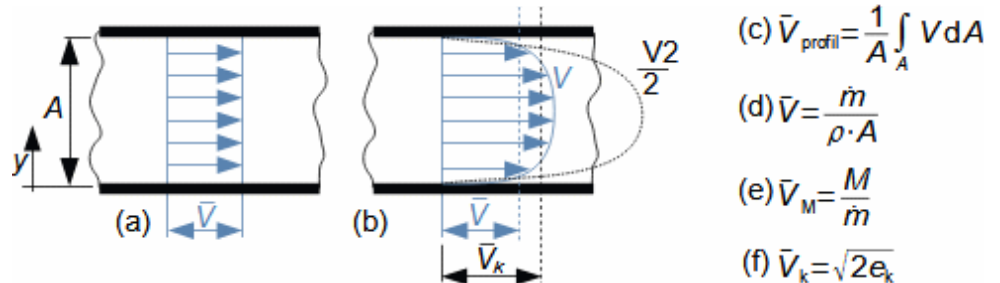
Při výpočtech parametrů proudu tekutiny bývá vstupní veličnou střední rychlost proudění. Existují čtyři druhy středních

Střední profilová rychlost

rychlostí, podle toho z jakých parametrů proudu se vychází při jejich výpočtu.

První možností je stanovit střední rychlost proudění z tvaru rychlostního profilu tekutiny integrací přes jeho průtočný průřez, viz Rovnice 3(c). Výsledná rychlost se nazývá střední profilovou rychlost.

3:



(a) rychlostní profil mezi dvěma deskami v případě proudění bez tření; (b) rychlostní profil mezi dvěma deskami reálné tekutiny; (c) střední profilová rychlost; (d) střední rychlost hmotnostního toku; (e) Střední rychlost hybnosti tekutiny; (f) střední energetická rychlost.  $A$  [ $\text{m}^2$ ] průtočný průřez;  $e_k$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ ] průměrná hodnota kinetická energie tekutiny;  $M$  [ $\text{N}$ ] hybnost tekutiny v kanále;  $\dot{m}$  [ $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ ] hmotnostní průtok;  $V$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] místní rychlost tekutiny;  $\bar{V}$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] střední rychlost hmotnostního toku (střední rychlost proudění);  $V_k$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] střední energetická rychlost;  $V_M$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] střední rychlost hybnosti tekutiny;  $V_{\text{profil}}$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] střední profilová rychlost;  $y$  [ $\text{m}$ ] souřadnice kolmá na směr proudění.

Střední rychlost hmotnostního toku

Nejrozšířenější způsob je výpočet střední rychlosti z rovnice kontinuity, tzv. střední rychlost hmotnostního toku, viz Rovnice 3(d). Je to tedy taková rychlost proudění, při které za jednotku času proteče kanálem stejné množství tekutiny odpovídající hmotnostnímu průtoku. Protože se jedná o obvyklou definici, tak se ji zkráceně říká střední rychlost proudění.

Střední rychlost hybnosti tekutiny

Třetí možností je vypočítat střední rychlost proudění z hybnosti proudící tekutiny, jedná se o tzv. střední rychlost hybnosti tekutiny. To je taková rychlost proudění, při které by proud dosahoval stejné hybnosti (síla, kterou působí paprsek tekutiny na kolmou desku) jako skutečný proud s rychlostním profilem, viz Vzorec 3(e).

Střední energetická rychlost

Výpočet střední rychlosti proudění z kinetické energie proudu se označuje jako střední energetickou rychlost, při této rychlosti by proud dosahoval stejného výkonu jako skutečný proud s rychlostním profilem, viz Vzorec 3(f).

Vztahy mezi středními rychlostmi proudění

Pro případ nestlačitelné tekutiny se hodnoty střední profilové rychlosti, střední rychlosti hmotnostního toku a střední rychlosti hybnosti tekutiny rovnají. Pokud není řečeno jinak je zde, i v jiné literatuře, obvykle za střední rychlost proudění považována střední rychlost hmotnostního toku, tj. výpočet z rovnice kontinuity.

Použití střední  
energetické rychlosti

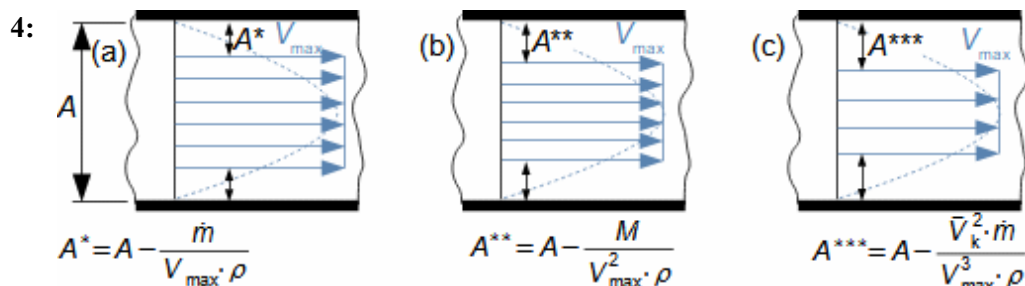
Střední energetická rychlost se používá v energetických bilancích, například ve výpočtech pomocí Bernoulliho rovnice, ve které kinetická energie tekutiny vystupuje, apod.

### Definice tloušťky mezní vrstvy

Při praktickém pozorování proudu tekutiny není často jednoznačné jaká je tloušťka mezní vrstvy, tak jako na Obrázku 1, proto bylo zavedeno několik definic tlouštěk mezní vrstvy. Nejčastěji se uvádí tři definice podle Obrázku 4, které jsou také použity k vyřešení Úlohy 1 na výpočet tloušťky mezní vrstvy.

Pošinovací tloušťka  
mezní vrstvy

První je tzv. pošinovací tloušťka mezní vrstvy, která odpovídá průtočnému průřezu, kterým by protékala pracovní tekutina maximální rychlostí a hmotnostním průtokem rovnající se rozdílu mezi průtokem bez tření a skutečném průtoku, viz Rovnice 4(a).



(a) pošinovací tloušťka mezní vrstvy; (b) impulsní tloušťka mezní vrstvy; (c) energetická tloušťka mezní vrstvy.  $A^*$  [ $\text{m}^2$ ] průtočný průřez pošinovací tloušťky mezní vrstvy;  $A^{**}$  [ $\text{m}^2$ ] průtočný průřez impulsní tloušťky mezní vrstvy;  $A^{***}$  [ $\text{m}^2$ ] průtočný průřez energetické tloušťky mezní vrstvy;  $V_{\max}$  [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ] maximální rychlost proudění ve vyšetřovaném místě kanálu. Rovnice jsou odvozeny v Příloze 5.

Impulsní tloušťka  
mezní vrstvy

Impulsní tloušťka mezní vrstvy odpovídá průtočnému průřezu, kterým by protékala pracovní tekutina maximální rychlostí s hybností tekutiny rovnající se rozdílu mezi celkovou hybností bez tření a skutečnou celkovou hybností tekutiny, viz Rovnice 4(b).

Energetická tloušťka  
mezní vrstvy

Energetická tloušťka mezní vrstvy odpovídá průtočnému průřezu, kterým by protékala pracovní tekutina maximální rychlostí o stejné kinetické energie jako je rozdíl mezi kinetickou energií tekutiny při proudění bez tření a skutečnou kinetickou energií tekutiny při proudění se třením, viz Vzorec 4(c).

Mezní vrstvy u  
obtákaných těles

V případech obtékání osamocených těles, respektive profilů se jednotlivé charakteristické tloušťky mezní vrstvy stanovují k rychlosti proudu před obtákaným tělesem, přičemž hranice ovlivněné oblasti, ke které se stanovuje průtok, je ve vzdálenosti, ve které je rychlost proudění už velmi blízká rychlosti před ovlivněnou oblastí, podrobněji v [Dejč, 1967, s. 235].

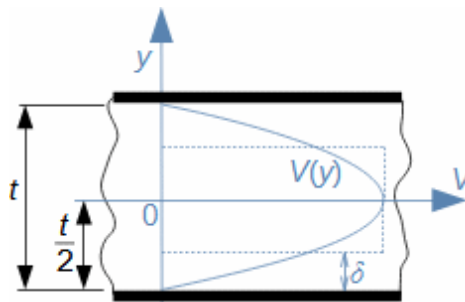
Difuzory

Održení proudění

Tyto charakteristické tloušťky mezní vrstvy se uplatňují v aerodynamice profilových mříží [Škorpík, 2023] a difuzorů<sup>5</sup>. Podle jednotlivých tlouštěk lze porovnávat typy kanálu mezi sebou z pohledu rychlostí, hybnosti a energetických ztrát, protože jsou aplikace, kde je důležitá například co nejmenší ztráta hybnosti a u jiné energetická ztráta a podobně. Například hybnost je důležitá při vyhodnocování citlivosti mezní vrstvy na *odtržení proudění*<sup>2</sup> od obtékaných ploch.

**Úloha 1:**  
Tloušťka mezní vrstvy

Vypočítejte charakteristické tloušťky mezní vrstvy pro proudění mezi dvěma deskami, jestliže by byl rychlostní profil parabolický. Maximální rychlost proudění, šířku, výšku kanálu a hustotu tekutiny si zvolte. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 1.



Obrázek k Úloze 1:  $t$  [m] vzdálenost desek;  $\delta$  [m] charakteristická tloušťka mezní vrstvy.

Postup řešení Úlohy 1

1. zadání:	$V_{\max}; t; h; \rho$	4. výpočet:	$M; A^{**}; \delta^{**}$
2. výpočet:	$A; m; V$	5. výpočet:	$V_k; A^{***}; \delta^{***}$
3. výpočet:	$A^*; \delta^*$		

$h$  [m] šířka kanálu

## Definice viskozity a její hodnoty

Laminární proudění

Dynamická viskozita

Kinematická viskozita

Vliv vnitřního tření na rychlostní profil při laminárním proudění lze kvalifikovat pomocí veličiny zvané dynamická viskozita (zkráceně jen viskozita), viz definiční Rovnice 5. Dynamická viskozita je poměr mezi tečným napětím a tenzorem rychlosti.

5:

$\eta = \frac{\tau}{\frac{dV}{dy}}; \tau = \frac{F}{S}; \nu = \frac{\eta}{\rho}$

$F$  [N] třecí síla působící na element;  $\eta$  [Pa·s] dynamická viskozita pracovní tekutiny;  $\tau$  [Pa] tečné (smykové) napětí mezi proudovými vlákny způsobené třecí silou (tření mezi proudnicemi);  $\nu$  [m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>] kinematická viskozita;  $S$  [m<sup>2</sup>] třecí plochy mezi vyšetřovanými vlákny.

Issac Newton

Veličinu viskozita definoval Issac Newton viskozitu na základě jednoduchého experimentu s vnitřním třením tekutiny, který je popsán v Příloze 6.

Newtonovská tekutina  
 Nenevtonovská tekutina  
 Anomální tekutina  
 Viskózní tekutina

Tekutiny, u kterých lze uplatnit výše uvedenou definici viskozity nazýváme newtonovské tekutiny a naopak tekutiny, ve kterých se viskozita mění s rychlostí nazýváme nenevtonovské tekutiny neboli anomální (tekutiny obsahující větší shluky molekul jako koloidní roztoky, suspenze, emulze gely apod. [Horák et al., 1961, s. 395], [Bird et al., 1968, s. 24]). Tekutiny, které mají nenulovou viskozitu se nazývají viskózní tekutiny.

Viskozita při prostorovém proudění

Při definici viskozity Vzorcem 5 jsme vycházeli z velmi jednoduchého případu proudění v rovině, který lze využít v případech kdy jeden rozměr nehraje při tvorbě mezní vrstvy významnou roli. Ale definovat jednotlivá napětí od tření tekutiny při proudění v prostoru je už mnohem složitější. Při proudění v prostoru je totiž nutné nalézt tenzor napětí (viz Úloha 2), ze kterého lze stanovit změny rychlostí v jednotlivých směrech. Vztahy mezi jednotlivými tečnými napětími a viskozitou při proudění v prostoru naleznete například v [Brdička et al., 2000, s. 613] nebo v [Bird et al., 1968, s. 97].

Hodnoty viskozit  
 Viskozimetr  
 William Sutherland  
 Viskozita vody

Dynamická viskozita tekutin se měří pomocí viskozimetrů, kterých je několik typů [Horák et al., 1961, s. 406]. Výsledky měření se uvádí do tabulek, které se využívají při výpočtech. Problém získání komplexních dat hodnot viskozity je v tom, že viskozita tekutin závisí na teplotě a tlaku. S rostoucí teplotou dynamická viskozita kapalin klesá a s rostoucím tlakem vzrůstá. Vliv tlaku je u většiny kapalin nevýznamný, vyjma velmi vysokých tlaků v řádech megapascalů. Dynamická viskozita plynů s rostoucí teplotou vzrůstá a je nezávislá na tlaku, vyjma extrémně nízkých nebo naopak vysokých tlaků [Horák et al., 1961, s. 446]. Z těchto důvodů se uvádí dynamické viskozity tekutiny pro technické účely pouze v závislosti na teplotě (pro některé případy lze použít pro výpočet změny dynamické viskozity plynů s teplotou rovnicí odvozenou australským fyzikem Williamem Sutherlandem (1859-1911), která je uvedena například v [Horák et al., 1961, s. 447], [Bird et al., 1968]). Hodnoty dynamické a kinematické viskozity různých tekutin jsou uvedeny například v [Vohlídal et al., 1999], [Fraas, 1989], [Ražnjević, 1984], [Cihelka et al., 1975], [Polesný et al., 1990], pro vodu a páru v Tabulkách 6, 7.

Viskozita směsi  
 Viskozita roztoku  
 Viskozita suchého vzduchu  
 Viskozita vlhkého vzduchu

V technické praxi se velmi často pracuje se směsmi, jak plynnými, tak kapalnými, které se skládají ze dvou nebo více čistých látek. Viskozita směsi závisí na molárních koncentracích jednotlivých složek směsi, viz Rovnice 8 a také Úloha 3. Nomogram pro určení výsledné viskozity roztoků kapalin, respektive olejů je uveden např. v [Šafr, 1970, s. 47]. Hodnoty viskozity suchého a vlhkého vzduchu jsou v Tabulkách 9, 10.



## 6: Viskozita vody při tlaku 101 325 Pa

<i>t</i>	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\eta$	1770,2	1303,9	1001,9	797,3	652,6	546,8	466,5	404,2	354,7
<i>v</i>	1769,7	1303,7	1003,3	800,46	657,46	553,2	474,28	413,22	364,84
<i>t</i>	90	100	110	120	130	140	150	160	170
$\eta$	314,7	281,8	254,7	232,05	212,9	196,54	182,46	170,24	159,55
<i>v</i>	325,87	293,92	267,84	246,05	227,74	212,22	198,97	187,6	177,78

*t* [°C] teplota;  $\eta$  [ $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]; *v* [ $\text{nm}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ] Hodnoty od teploty 100 °C a výše jsou pro sytou vodu, tedy při vyšším tlaku odpovídající syté kapalině. Výběr z [Vohlídal et al., 1999].

## 7: Viskozita syté vodní páry

<i>t</i>	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\eta$	9,24	9,461	9,7272	10,01	10,307	10,616	10,935	11,26	11,592
<i>v</i>	1778	1005,8	561,81	329,12	201,15	127,68	83,837	56,747	39,474
<i>t</i>	90	100	110	120	130	140	150	160	170
$\eta$	11,929	12,269	12,612	12,956	13,301	13,647	13,992	14,337	14,681
<i>v</i>	28,141	20,511	15,251	11,547	8,8853	7,9770	5,4912	4,3983	3,5615

*t* [°C];  $\eta$  [ $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]; *v* [ $\text{nm}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ]. Výběr z [Mareš et al., 1999].

8:  $\eta = \sum \eta_i \delta_i$  Rovnice pro výpočet viskozity směsi:  $\eta_i$  [ $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ] dynamická viskozita jednotlivé složky směsi;  $\delta_i$  [1] molární zlomek jednotlivé složky směsi. Rovnice je platná pro případy, kdy jsou jednotlivé viskozity nezávislé na parciálních tlacích jednotlivých složek.

## 9: Viskozita suchého vzduchu při 0,1 MPa

<i>t</i>	-20	0	10	20	40	60	80	100	150
$\eta$	16,28	17,08	17,75	18,24	19,04	20,10	20,99	21,77	23,83
<i>v</i>	11,93	13,70	14,70	15,70	17,60	19,60	21,70	23,78	29,50
<i>t</i>	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\eta$	25,89	29,70	33	36,20	39,10	41,70	44,40	46,60	49,30
<i>v</i>	35,82	48,20	63	79,30	96,80	115	135	155	178

*t* [°C];  $\eta$  [ $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]; *v* [ $\mu\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ]. Výběr z [Cihelka et al., 1975], [Polesný et al., 1990], [Fraas, 1989], [Ražnjević, 1984].

## 10: Viskozita vlhkého vzduchu při 0,1 MPa

<i>t</i>	10	20	40	60	80	100
$\phi$	$\eta$	$\eta$	$\eta$	$\eta$	$\eta$	$\eta$
0,2	17,73	18,20	18,91	19,75	20,15	20,12
0,4	17,71	18,16	18,79	19,43	19,45	18,96
0,6	17,69	18,12	18,67	19,13	18,86	18,10
0,8	17,67	18,09	18,56	18,85	18,35	17,43
1	17,65	18,05	18,45	18,59	17,91	16,90
	<i>v</i>	<i>v</i>	<i>v</i>	<i>v</i>	<i>v</i>	<i>v</i>
0,2	14,67	15,63	17,35	18,86	19,77	19,66
0,4	14,63	15,56	17,11	18,17	18,16	16,75
0,6	14,60	15,49	16,87	17,53	16,80	14,60
0,8	14,57	15,43	16,64	16,93	15,62	12,93
1	14,54	15,36	16,42	16,38	14,60	11,61

*t* [°C];  $\eta$  [ $\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]; *v* [ $\mu\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ];  $\phi$  [1] relativní vlhkost vzduchu

**Úloha 2:** Určete tvar tenzoru napětí v tekutině při laminárním proudění mezi dvěma deskami, jestliže ve vyšetřovaném bodě je tlak  $p$ . Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 2.

Tenzor napětí v tekutině

$$\tau \begin{pmatrix} -p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p \end{pmatrix} \quad \tau_{xz} \sim \frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad \tau_{xy} \sim \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad \tau_{yx} \sim \frac{\partial V_x}{\partial y}, \quad \tau_{yz} \sim \frac{\partial V_z}{\partial y}$$

$$\tau_{zy} \sim \frac{\partial V_y}{\partial z}, \quad \tau_{zx} \sim \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

Rovnice k Úloze 2:  $p$  [Pa] tlak.

Postup řešení Úlohy 2

- |             |   |            |                         |
|-------------|---|------------|-------------------------|
| 1. návrh:   | obecného tenzoru napětí v tekutině $\tau$ ,<br>viz příložený tenzor | 3. odečet: | rovnice pro $\tau_{yx}$ |
| 2. dedukce: | stanovení nulových složek tenzoru                                   |            |                         |

**Úloha 3:** Určete viskozitu směsi dusíku  $N_2$  a kyslíku  $O_2$  při standardních podmínkách. Molární zlomek dusíku pro tuto směs je 0,785. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 3.

Viskozita směsi

Postup řešení Úlohy 3

- |            |                |             |                |
|------------|----------------|-------------|----------------|
| 1. zadání: | $\delta_{N_2}$ | 3. výpočet: | $\delta_{O_2}$ |
| 2. odečet: | $\eta_i$       | 4. výpočet: | $\eta$         |

### Rovnice laminárního proudění – Navier-Stokesova rovnice

Ztrátové teplo

Rychlostní profil

Claude-Louis Navier

George Gabriel Stokes

Nyní stojíme před úkolem určit ztrátu, respektive ztrátové teplo případně tvar rychlostního profilu při laminárním proudění. Při řešení nelze aplikovat rovnice potenciálního proudění a je nutné odvodit zcela nový typ rovnice zahrnující ztrátové teplo. Jak již víme, množství ztrátového tepla roste ve směru proudění, odtud a pomocí definice viskozity, lze odvodit rovnici laminárního pohybu tekutiny nazývanou také jako Navier-Stokesovu rovnicí, viz Rovnice 11. Uvedenou rovnicí na základě kinetiky pohybu molekul odvodil francouzský inženýr Claude-Louis Navier (1785-1836). Irský matematik George Gabriel Stokes (1819-1903) je v názvu přidán na počest, protože s rovnicí dále experimentoval a hlouběji popsal její možnosti [Bais, 2009], i když vědců, kteří ji rozvinuli je více [Bauer et al., 1950].

$$11: \quad -\frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{g}; \quad \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{V} = -\text{grad } L_q; \quad dL_q = (\text{grad } L_q) \cdot d\vec{s}$$

$g$  [ $m \cdot s^{-2}$ ] gravitační zrychlení;  $\text{grad } L_q$  [ $J \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}$ ] gradient ztrátového tepla (množství ztrátového tepla uvolněného v 1 kg tekutiny při posuvu o 1 m daným směrem);  $p$  [Pa] tlak;  $\vec{s}$  [m] jednotkový směrový vektor;  $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$  [ $J \cdot kg^{-1} \cdot m^{-1}$ ] změna (gradient) kinetické energie ve směru proudění. Rovnice je odvozena pro případ ustáleného laminárního proudění viskózní tekutiny při konstantní hustotě v Příloze 7.

Vliv hustoty na vnitřní tření

Z rovnice ztrátového tepla mimo jiné plyne, že plyn při velmi malé hustotě, respektive tlaku může mít velmi vysoké vnitřní tření. To je také příčina výskytu laminárního proudění při malých rychlostech nebo u tekutin s vysokou kinematickou viskozitou.

Zvyšování entropie tekutiny

Teplo znovu využité

Ztrátové teplo  $L_q$  je přesně to teplo, které zvyšuje entropii tekutiny. Zvýšení ztrátového tepla může docházet nejen při tření ale i při víření mezi jednotlivými proudnicemi. Tyto víry získávají energii tak, že třecí síla vytváří moment v nejbližším okolí vyšetřovaného bodu, jak naznačuje Obrázek 5. Nicméně při stabilním laminárním proudění mají víry stále stejnou energii, takže stejné množství energie se třením transformuje také na vnitřní tepelnou energii. U plynů se část ztrátového tepla, respektive vnitřní tepelné energie může zpět transformovat na tlakovou, kinetickou nebo potenciální energii, respektive práci. To je způsobeno tím, že při zvýšení teploty se zvětší měrný objem plynu. Pro tuto energii se používá v teorii lopatkových strojů pojem teplo znovu využité [Škorpík, 2018].

Laminární proudění jako vírové proudění

Laminární proudění není potenciální proudění, protože rotor vektoru rychlosti je různý od nuly, respektive vektor rychlosti není gradientem potenciální veličiny. Nicméně rychlost laminárního proudění je potenciální veličina [Škorpík, 2021], protože ji lze určit pouze zadáním souřadnic.

Odvození Eulerovy rovnice hydrodynamiky

Jestliže je laminární proudění vírové proudění, pak nelze pro výpočet jeho dynamických účinků použít Eulerovu rovnici hydrodynamiky pro ideální tekutinu, ale Eulerovu rovnici hydrodynamiky pro reálnou tekutinu, kterou lze odvodit stejným postupem jako v případě proudění ideálních tekutin (Rovnice 12). Rozdíl při odvozování je ve stanovení zrychlení tekutiny. V případě ideálních tekutin je zrychlení rovno gradientu kinetické energie, v případě vírového laminárního proudění je změna kinetické energie a tedy zrychlení tekutiny ve směru proudění rovna skalárnímu násobku vektoru rychlosti a divergence rychlosti. Při popisu laminárního proudění lze při energetické bilanci vycházet tedy z Navier-Stokesovy rovnice a pro silovou rovnováhu použít Eulerovu rovnici hydrodynamiky.

$$12: \quad \vec{a} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p \qquad (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) + \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

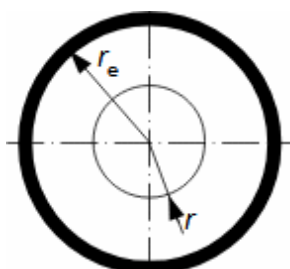
Odvození Eulerovy rovnice hydrodynamiky pro vírové proudění a souvislosti s potenciálním prouděním jsou uvedeny v Příloze 8.

### Tlaková ztráta v potrubí při laminárním proudění

Gotthilf Hagen  
Jean Poiseuille  
Poiseuilleův zákon  
Johann Nikuradse

Odvození rovnic pro tlakovou ztrátu a rychlost tekutiny při laminárním proudění v kanálech jednoduchých tvarů není pomocí Navier-Stokesovy rovnice obtížné [Horák et al., 1961], [Brdička et al., 2000], [Macur, 2010], [Bauer et al., 1950] a Úloha 4. Například pro potrubí kruhového průřezu lze odvodit Rovnice 13. Tyto rovnice poprvé odvodil německý inženýr Gotthilf Hagen (1797-1884) a francouzský fyzik Jean Poiseuille (1797-1869), proto se někdy označují jako Poiseuilleův zákon [Ďaďo et al., 2005, s. 36]. Experimenty platnost této rovnice potvrdil (mimo velmi krátkých úseků) německý inženýr původem z Gruzie Johanna Nikuradseho (1894-1979).

13:



$$L_p = 8 \frac{Q \cdot l \cdot \eta}{\pi \cdot r_e^4} = 8 \frac{\bar{V} \cdot l \cdot \eta}{r_e^2}$$

$$V = 2 \frac{Q}{\pi r_e^4} (r_e^2 - r^2) = 2 \frac{\bar{V}}{r_e^2} (r_e^2 - r^2)$$

$$L_q = \frac{L_p}{\rho} = 8 \frac{\eta \cdot \bar{V} \cdot l}{\rho \cdot r_e^2}$$

$L_p$  [Pa] tlaková ztráta na vyšetřované délce potrubí (pressure losses, pressure drop);  $l$  [m] délka potrubí;  $r_e$  [m] vnitřní poloměr potrubí;  $Q$  [ $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ] objemový tok;  $r$  [m] vzdálenost vyšetřovaného poloměru od středu (osy) potrubí;  $V$  [ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ] axiální složka rychlosti (ve směru osy potrubí). Vztah je odvozený v Příloze 9 pro případ ustáleného proudění nestlačitelné tekutiny v kruhového potrubí, při vynechání vlivu potenciální energie z Navier-Stokesovy rovnice.

### Vývoj laminární mezní vrstvy a Reynoldsovo číslo

Vývoj rychlostního profilu  
Vstupní délka kanálu  
Reynoldsovo číslo

Rychlostní profil po celé vyšetřované délce nemusí být stálý, zvláště jedná-li se o vstupní úsek do zkoumaného kanálu, ve kterém teprve dochází ke vzniku mezní vrstvy (objeví se zdroje tření – stěny kanálu, viz Obrázek 1). Vstupní délka kanálu  $x_e$ , na které dochází k vývoji mezní vrstvy je funkcí poměru dynamického tlaku a tečného napětí v proudu, který označujeme jako Reynoldsovo číslo  $Re$ , dále je funkcí koeficientu hydraulické vstupní délky kanálu, jeho tvaru a tzv. charakteristickém rozměru, viz Vzorec 14.

14:  $x_e \geq C_h \cdot L \cdot Re$ ;  $Re = \frac{\bar{V} \cdot L}{\nu}$   $C_h$  [m] koeficient hydraulické vstupní délky;  $L$  [m] charakteristický rozměr;  $Re$  [1] Reynoldsovo číslo (do vzorce pro  $x_e$  dosazujeme  $Re$  při plně vyvinuté mezní vrstvě) – vzorec pro Reynoldsovo číslo je odvozen v Příloze 10 nebo též v [Horák et al., 1961, s. 404]. Popisy jednotlivých veličin následují.

Koeficient hydraulické vstupní délky  
Joseph Boussinesq

Pro trubku kruhového průřezu jsou hodnoty hydraulické vstupní délky přibližně v rozsahu  $C_h \approx 0,025 \dots 0,065$  – hodnotu 0,065 odvodil francouzský fyzik a matematik Joseph Boussinesq

Ludwig Schiller

(1842-1929), hodnotu 0,025 německý fyzik Ludwig Schiller (1882-1961). Přičemž lze říci, že vyšší hodnoty odpovídají kratším a nižší delším vstupním úsekům [Maštovský, 1964, s. 194], [Bauer et al., 1950, s. 143]. Koeficienty  $C_h$  pro kanály jiných než kruhových průřezů jsou uvedeny v [Latif, 2006, s. 208] a v Tabulce 15 jsou uvedeny hodnoty pro obdélníkové kanály.

15: Hodnoty hydraulické vstupní délky

	$t=h$	$h=2 \cdot t$	$h=4 \cdot t$	$h \cdot t^1 \approx \infty$
$C_h$	0,09	0,085	0,075	0,011

$C_h$  [m];  $h$  [m] delší strana obdélníku;  $t$  [m] kratší strana obdélníka. [Latif, 2006].

Charakteristický rozměr (ekvivalentní průměr)

Omočený obvod

Profil

Tětiva

Charakteristický rozměr ve Vzorcích 14 zohledňuje rozměr průtočného kanálu, respektive obtékaného tělesa. Je to rozměr, ke kterému se provádí případná měření. Charakteristický rozměr uzavřených kanálů je nejčastěji definován jako poměr čtyřnásobku velikosti průtočného průřezu a omočeného obvodu kanálu (Vzorec 16) – v případě kruhového průřezu se tedy jedná o průměr, proto se také charakteristický rozměr nazývá i jako ekvivalentní průměr, [Cihelka et al., 1975, s. 110]. Existují ale i atypické případy, které jsou uvedeny v [Sazima et al., 1989, s. 378] a charakteristickým rozměrem těles bývá obvykle rozměr, který má největší vliv na proudění (například u lopatkových profilů je to délka tětivy).

16:  $L = \frac{4 \cdot A}{u}$   $A$  [m<sup>2</sup>] průtočná plocha;  $u$  [m] smočený obvod (obvod průtočného průřezu, který je ve styku s proudící tekutinou).

### Střední rychlosti laminárního proudění

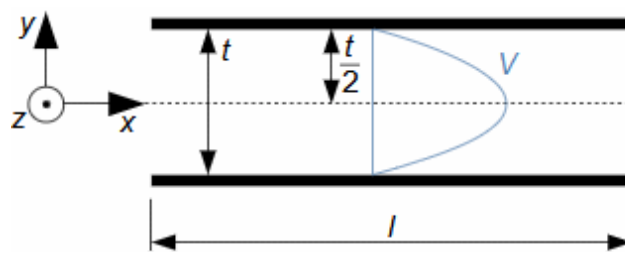
Střední rychlost

Výpočet střední rychlosti plně vyvinutého laminárního proudění není u jednoduchých kanálů problematický, jak naznačují Rovnice 13 pro potrubí. Odtud lze pro laminární proudění mezi dvěma deskami a v potrubí odvodit Rovnice 17.

17: (a)  $\bar{V} = \sqrt{\frac{5}{3}} e_k = \sqrt{\frac{5}{6}} \bar{V}_k$  (b)  $\bar{V} = \sqrt{e_k} = \sqrt{\frac{1}{2}} \bar{V}_k$  (a) rovnice střední rychlosti proudění při laminárním proudění tekutiny mezi dvěma deskami; (b) rovnice střední rychlosti proudění při laminárním proudění tekutiny trubkou. Rovnice byly odvozeny pro konstantní hustotu tekutiny  $\rho = \text{konst.}$   $\bar{V}$  [m·s<sup>-1</sup>] střední rychlost proudění. Odvození rovnic je uvedeno v Příloze 11.

Úloha 4:  
Proudění mezi deskami  
Navier-Stokesova  
rovnice

Stanovte rovnice pro ztrátové teplo, tlakovou ztrátu a rychlost pro případ ustáleného plně vyvinutého laminárního proudění nestlačitelné tekutiny mezi dvěma deskami. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 4.



$$V_x = 6 \frac{Q}{h \cdot t^3} \left( \frac{t^2}{4} - y^2 \right)$$

$$L_{q,x} = 12 \frac{Q \cdot \eta}{\rho \cdot h \cdot t^3}$$

$$L_p = 12 \frac{Q \cdot \eta}{h \cdot t^3} l$$

Rovnice k Úloze 4:  $L_{q,x}$  [ $J \cdot m^{-1}$ ] gradient ztrátového tepla ve směru proudění x;  $l$  [m] délka kanálu.

### Kolaps laminárního proudění a vývoj turbulentního proudění

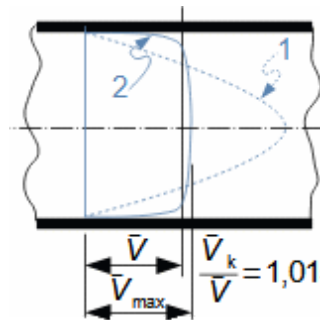
Kritická střední rychlost

Z Obrázku 5 je zřejmé, že mezi proudnicemi působí na element tekutiny dvojice sil, která jej uvádí do rotace. To znamená, že mezi jednotlivými proudnicemi vzniká řada drobných vírů, které svou energii při laminárním proudění maří třením, ale při vyšších rychlostech energie ve vírech postupně roste. Nakonec mohou víry získat takovou energii, že začnou narušovat hranice proudnic a dochází k vzájemnému promíchávání proudu a sdílení energií. Nastává turbulentní proudění. Rychlost, při které toto nastane se nazývá kritická střední rychlost proudění. Při této rychlosti setrvačné síly částic převažují nad třecí silou.

Turbulentní proudění  
Rychlostní profil  
Střední rychlost proudění

Při turbulentním proudění nemají částice ve všech místech stálou rychlost, ale průměrně lze definovat jak střední rychlost proudění tekutiny (viz také Obrázek 2), tak rychlostní profil, viz Obrázek 18. Tvar rychlostního profilu turbulentního proudění lze stanovit podle rovnic uvedených například v [Bird et al., 1968, s. 171] a [Dejč, 1967, s. 257].

18:



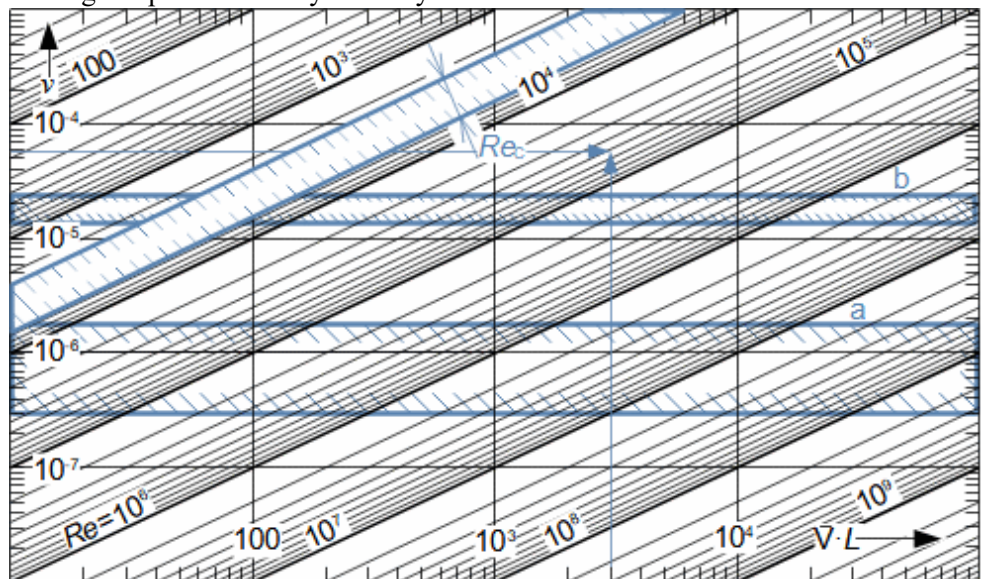
1-rychlostní profil laminárního proudění; 2-rychlostní profil turbulentního proudění.  $V_{\max}$  [ $m \cdot s^{-1}$ ] maximální rychlost v turbulentním profilu. Data pro poměry rychlostí [Maštovský, 1964, s. 78], [Mikula et al., 1974, s. 57].

Kritické Reynoldsovo číslo  
Horní kritické Reynoldsovo číslo

Přechod z laminárního proudění do turbulentního je pozvolný a rozhodující pro určení o jaké proudění se jedná je velikost Reynoldsova čísla vyšetřovaného proudění, protože vznikající víry budou narušovat proudová vlákna tím více, čím větší bude poměr dynamického tlaku proudící tekutiny (setrvačná síla) ku tečnému napětí (třecí síla) v tekutině. Velikost Reynoldsova čísla, při kterém dochází k zhroucení laminárního proudění se nazývá kritické Reynoldsovo číslo. Při opakovaných

experimentech proudění v potrubí, kde charakteristickým rozměrem byl průměr potrubí, bylo zjištěno, že do  $Re=2320$  se jedná vždy o laminární proudění (kritické Reynoldsovo číslo  $Re_c$ , kritická střední rychlost proudění). V rozmezí  $Re=2320$  do  $Re=5000$  až  $6000$  je tzv. přechodová oblast (rychlostní profil je nestabilní). Od  $Re=6000$  (tzv. horní kritické Reynoldsovo číslo) se jedná o proudění turbulentní. Je třeba zdůraznit, že v praxi tyto hodnoty budou nižší, protože zde uvedené hodnoty pochází z měření v laboratořích na dokonale uložených potrubích bez vibrací. Nomogram pro výpočet Reynoldsova čísla s vyznačením přechodové oblasti mezi proudění pro potrubí je na Obrázku 19. Z nomogramu mimo jiné vyplývá, že laminární proudění v běžných případech nastává jen za velmi vysokých hodnot kinematických viskozit a nízkých rychlostí – nejpravděpodobněji se s ním lze setkat u vzduchovodů malých průměrů – jinak jsou Reynoldsova čísla daleko větší než kritické Reynoldsovo číslo.

19: Nomogram pro odečet Reynoldsových čísel



$V$  [m·s<sup>-1</sup>];  $L$  [mm];  $\nu$  [m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>];  $Re$  [1]. a-rozsah kinematických viskozit vody mezi 0 °C a 100 °C; b-rozsah kinematických viskozit suchého vzduchu mezi 0 °C a 100 °C.  $Re$  [1] rozsah kritických Reynoldsových čísel pro potrubí.

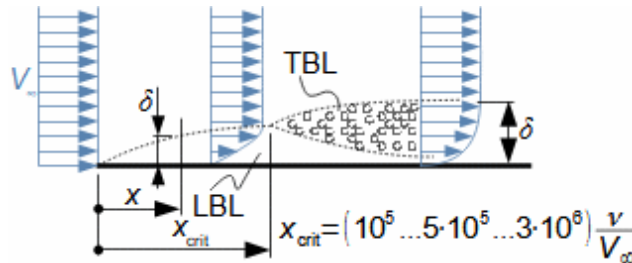
### Turbulentní mezní vrstva

Turbulence  
Potrubí  
Turbulizátory  
Održení proudění

Při postupném vývoji mezní vrstvy nepřechází proudění ani při vysokých rychlostech přímo na turbulentní, nejprve totiž musí dojít k projevům třecích sil. Proto k vývoji turbulencí dojde až od určité vzdálenosti od vstupu, viz Obrázek 20. Například o plně vyvinutém turbulentním prouděním v potrubí můžeme hovořit až v oblasti potrubí vzdálené od ústí 10 až 60 průměrů potrubí [Jícha, 2001, s. 66]. Délka úseku, na které začne proudění turbulizovat také záleží na geometrii vstupu, kde se mohou

narušovat proudnice o vstupní hrany a také drsnosti povrchu, na tomto principu fungují tzv. turbulizátory, která mají za úkol vyvolat turbulentní proudění co nejdříve, například pro potřeby promíchávání proudů, nebo pro potřeby rovnoměrného rozložení kinetické energie proudu jako jedno z opatření ke snížení citlivosti na *odtržení mezní vrstvy od stěn difuzorů*<sup>5</sup> a pod.

20:



LBL-laminární mezní vrstva (laminar boundary layer); TBL turbulentní mezní vrstva (turbulent boundary layer).  $\delta$  [m] lokální tloušťka mezní vrstvy (výpočet například v [Dejč, 1967, s. 257]);  $x$  [m]

vzdálenost od okraje;  $x_{crit}$  [m] začátek přechodu z laminární do turbulentní mezní vrstvy (uvedený vzorec pro výpočet  $x_{crit}$  je pro obtékání desky, nižší hodnoty z rozmezí jsou pro drsnější povrchy, jako nejčastější hodnota se uvádí  $5 \cdot 10^5$  [Jícha, 2001, s. 54]). Zdroj: [Japikse, 1997, s. 8-4].

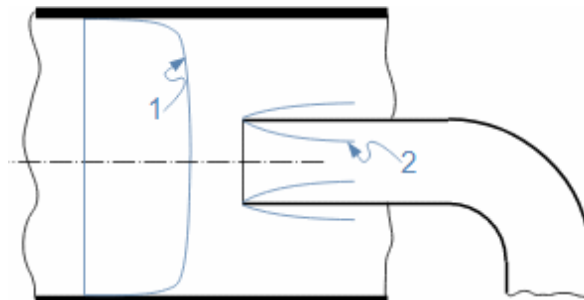
### Zánik turbulencí

Laminární mezní vrstva

Laminátor

Turbulentní proudění může zpět přejít do laminárního, jestliže klesne součin rychlosti a charakteristického rozměru, respektive klesne Reynoldsovo číslo pod kritické Reynoldsovo číslo. Například vložíme-li do turbulentního proudění desku, tak na jejích obou stranách se vytvoří laminární mezní vrstva přesně podle Obrázku 20. Další příkladem je změna průměrů potrubí, nebo vložení kanálu do turbulentního proudu, jak je naznačeno na Obrázku 21. V případě nasávání turbulentního proudu se na nátokovém okraji vloženého kanálu vytvoří laminární vrstva (v jádru je stále turbulentní), která, jestliže je v tomto kanálu Reynoldsovo číslo dostatečně nízké, se může spojit a může vytvořit laminární profil v celém průřezu. Stejný efekt vzniku laminární vrstvy lze sledovat i při proudění v lopatkových kanálech, i když na vstupu je turbulentní proud. Vložky v proudu, ve kterých má vzniknout nebo udržet laminární vrstva se nazývá laminátor.

21:



1-plně vyvinutý turbulentní profil; 2-oblasti vzniku laminárních mezních vrstev.



## Odkazy

- ŠKORPÍK, Jiří, 2018, Vztah mezi obvodovou a vnitřní prací stupně lopatkového stroje, *Transformační technologie*, Brno, [online], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://www.transformacni-technologie.cz/14.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2021, Technická matematika, *Transformační technologie*, Brno, [online], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://www.transformacni-technologie.cz/42.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2022, Aerodynamika profilových mříží, *Transformační technologie*, Brno, [online], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://turbomachinery.education/aerodynamika-profilovych-mrizi.html>.
- ANDRONIKAŠVILI, Elefter Luarsabovič, 1983, *Vzpomínky na kapalné hélium*, Mladá fronta, Praha.
- BAIS, Sander, 2009, *Rovnice: symboly poznání*, Dokořán, Praha, ISBN 978-80-7363-228-1.
- BAUER, František, Oldřich BRŮHA a Zbyněk JAŇOUR, PEŠEK, Rudolf, ed., 1950, *Základy proudění*, Vědecko-technické nakladatelství, Praha.
- BIRD, R. Byron, Warren E. STEWART a Edwin N. LIGHTFOOT, 1968, *Přenosové jevy: sdílení hybnosti, energie a hmoty*, Academia, Praha.
- BRDIČKA, Miroslav, SAMEK, Ladislav, SOPKO, Bruno, 2000, *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, ISBN 9788020007728.
- CIHELKA, Jaromír, BRANDA, Jaroslav, CIKHART, Jiří, ČERMÁK, Jan, CHYSKÝ, Jaroslav, PITTER, Jaroslav, VALÁŠEK, Jiří, 1975, *Vytápění a větrání*, SNTL, Praha.
- DEJČ, Michail, 1967, *Technická dynamika plynů*, SNTL, Praha.
- ĎAĎO, Stanislav, Ludvík BEJČEK, Antonín PLATIL, 2005, *Měření průtoku a výšky hladiny*, BEN - technická literatura, Praha, ISBN 9788073001568.
- FRAAS, Arthur, 1989, *Heat exchanger design*, John Wiley&Sons, Inc., ISBN 0-471-62868-9.
- GARAJ, Jozef, 1957, *Základy vektorového počtu*, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, n.p., Bratislava.
- HORÁK, Zdeněk, KRUPKA, František, 1976, *Fyzika, Příručka pro vysoké školy technického směru*, SNTL, Praha.
- HORÁK, Zdeněk, KRUPKA, František, ŠINDELÁŘ, Václav, 1961, *Technická fyzika*, SNTL, Praha.
- JAPIKSE, David, 1997, *Introduction to turbomachinery*, Oxford University Press, Oxford, ISBN 0-933283-10-5.
- JÍCHA, Miroslav, 2001, *Přenos tepla a látky*, Vysoké učení technické v Brně, Brno, ISBN 80-214-2029-4.
- KADRNOŽKA, Jaroslav, 2003, *Lopatkové stroje*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, ISBN 80-7204-297-1.
- KAPICA, Pjotr, 1982, *Experiment, teorie, praxe*, Mladá fronta.
- LATIF, Jiji, 2006, *Heat Convention*, Springer-Verlag, Berlin, ISBN-10 3-540-30692-7.
- MACUR, Milan, 2010, *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*, Vutium, Brno, ISBN 978-80-214-3944-3.
- MAREŠ, Radim, ŠIFNER, Oldřich, KADRNOŽKA, Jaroslav, 1999, *Tabulky vlastností vody a páry, podle průmyslové formulace IAPWS-IF97*, VUTIUM, Brno, ISBN 80-2141316-6.
- MAŠTOVSKÝ, Otakar, 1964, *Hydromechanika*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- MÍKA, Vladimír, 1977, *Základy chemického inženýrství*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- MIKULA, Julius, KOČKA, Jaroslav, ŠKRAMLÍK, Emanuel, ŠTAUBER, Zdeněk, VESELÝ Adolf, OBR, Jan, 1974, *Potrubí a armatury*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.
- POLESNÝ, Bohumil a kol., 1990, *Termodynamická data pro výpočet tepelných a jaderných energetických zařízení*, Vysoké učení technické v Brně, Brno, ISBN 80-214-0160-5.
- RAŽNJEVIĆ, Kuzman, 1984, *Termodynamické tabulky*, Alfa, Bratislava.
- SAZIMA, Miroslav, KMONÍČEK, Vladimír, SCHNELLER, Jiří, 1989, *Teplo*, SNTL, Praha.
- SCHWENK, Wolfram, JACOBI, Michael, 2017, *Voda v pohybu - úžas v nás: Pozorování a pokusy*, Malvern, Praha, ISBN: 978-80-7530-069-0.
- ŠAFR, Emil, 1970, *Technika mazání*, SNTL, Praha.
- VOHLÍDAL, Jiří, JULÁK, Alois, ŠTULÍK, Karel, 1999, *Chemické a analytické tabulky*, Grada, Praha, ISBN 978-80-7169-855-5.