
MACHOVO ČÍSLO A EFEKTY PŘI PROUDĚNÍ VYSOKÝMI RYCHLOSTMI

Jiří Škorpík, skorpik.jiri@email.cz

Úvod	3.3
Dopady konečné velikosti rychlosti zvuku na kontinuitu proudu	3.3
Přímá (kolmá) rázová vlna	3.7
Šikmá rázová vlna	3.9
Nedosažitelné kompresní vlny	3.11
λ -rázová vlna	3.12
Expanzní vlny	3.13
Vliv stlačitelnosti proudu při vysokých rychlostí na aerodynamiku těles	3.14
Aerodynamika profilových mříží ve stlačitelném prostředí	3.18
Odkazy	3.19
Přílohy	3.21

Author: Jiří, Škorpík (first name, surname)
Issue date: Februar, 2023
Title: Machovo číslo a efekty při proudění vysokými rychlostmi
Journal: Transformační technologie (on-line journal at transformacni-
technologie.cz; fluid-dynamics.education; fluid-
dynamics.education; stirling-engine.education)
ISSN: 1804-8293

Copyright©Jiří Škorpík, 2023

All rights reserved.

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

Úvod

Machovo číslo
Rychlost zvuku
Nestlačitelná tekutina
Stlačitelná tekutina

Obecně je za vysokou rychlost považována rychlost, při které je dosaženo takové velikosti poměru rychlosti proudu ku rychlosti šíření zvukův tekutině neboli Machova čísla ([Rovnice 337](#)), při kterém už pro danou aplikaci nelze uvažovat tekutinu za nestlačitelnou. Stlačitelnost totiž způsobuje efekty v proudění, které se při proudění nestlačitelných tekutin nebo nízkých Machových číslech nevyskytují. Právě o obecných projevech vlastností stlačitelných tekutin při proudění pojednává tento článek.

337:
$$M = \frac{V}{a}$$

$$a = \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

a [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost šíření zvuku ve vyšetřovaném kontinuu;
 M [Mach] Machovo číslo; p [Pa] tlak; r [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$] individuální plynová konstanta; T [K] absolutní teplota plynu (statická teplota); V [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$] rychlost tělesa nebo proudění;
 ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$] hustota; κ [1] poměr tepelných kapacit. Odvození rovnice pro rychlost zvuku je v [Příloze 337](#).

Podzvukové proudění
Transonické proudění
Zvukové proudění
Nadzvukové proudění

Jestliže je v okolí vyšetřovaného bodu tekutiny Machovo číslo menší než jedna ($M < 1$), pak mluvíme o podzvukovém (subsonických) proudění. Jestliže se v okolí vyšetřovaného bodu tekutiny pohybuje hodnota Machova čísla kolem 1, konkrétně v rozmezí $0,8 < M < 1,3$, pak mluvíme o transonickém proudění – speciálně při velikosti Machova čísla právě 1 ($M = 1$) mluvíme o zvukovém (sonické) proudění. Jestliže se v celém okolí vyšetřovaného bodu tekutiny pohybuje hodnota Machova čísla nad hodnotu 1 ($M > 1$), pak mluvíme o nadzvukovém (supsonickém) proudění.

Kritické Machovo číslo

Někdy se setkáme s pojmem kritické Machovo číslo, toto číslo je vztaženo k nějakému jasně definovanému bodu v rámci vyšetřovaného objemu tekutiny, a jedná se o takovou velikost Machova čísla, při které se někde v daném objemu dosáhne zvukové nebo nadzvukové rychlosti (například v důsledku obtékání nějakých těles uvnitř).

Dopady konečné velikosti rychlosti zvuku na kontinuitu proudu

Zvuk
Nestlačitelná tekutina
Stlačitelná tekutina

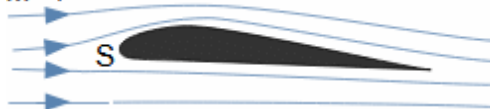
Zvuk je tlaková porucha šířící se stlačitelným prostředím rychlostí zvuku a . To znamená, že jakékoliv změny tlaku v proudu tekutiny, například způsobené změnou rychlosti proudění při expanzi nebo kompresi, se projevují ve směru proudu rychleji než proti proudu. To je základní odlišnost v chování mezi stlačitelným a nestlačitelným prouděním. Ve stlačitelném proudění je nemožné aby se změny tlaku nějak projevil proti

směru proudění, jestliže proudění dosáhlo nebo přesáhlo rychlost zvuku. Odtud sledujeme zásadní rozdíly mezi chováním podzvukového a zvukové nebo nadzvukového proudění stlačitelných plynů při obtékání těles nebo v kanálech. Tyto rozdíly mezi podzvukovým a nadzvukovým proudem lze vyjádřit diferenciální rovnicí zvanou Hugoniotův teorém.

Podzvukové proudění
Zvuk

Při podzvukovém i nadzvukovém proudění je zvuk neboli tlaková porucha zároveň informace o tlaku v okolí zdroje této poruchy pomocí, které se stlačitelné prostředí přizpůsobuje zdroji tlakové poruchy, například na Obrázku 520 díky šíření tlakové poruchy, která je rychlejší než nakreslený profil se vzduch rozestupuje (viz nakreslené proudnice) už před profilem; tlaková porucha šířící se od otvoru v tlakové nádobě směrem dovnitř nádoby, která způsobí, že plyn uvnitř nádoby začne proudit směrem k otvoru, kde je nižší tlak apod. Rychlost zvuku lze, z tohoto pohledu, také chápat jako rychlost šíření informace v daném prostředí.

520: $M < 1$



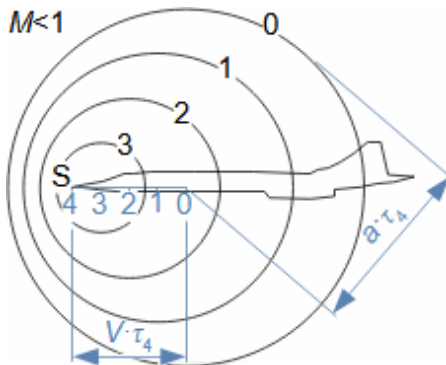
S-zdroj tlakové poruchy (source).
Nakreslený profil se pohybuje podzvukovou rychlostí směrem doleva.

Zvuková vlna
Intenzita zvuku

Tlaková porucha se v homogenním prostředí šíří v kulových plochách, tj. všemi směry stejnou rychlostí. Je-li zdroj tlakové poruchy v klidu (např. reproduktor...) tvoří hranici zvukové vlny v jednotlivých časech soustředné koule v jejichž středu je zdroj S tlakové poruchy. Rozdíl tlaku na rozhraní neporušeného prostředí a zvukové vlny se zmenšuje s rostoucím poloměrem zvukové vlny (klesá její energetická hustota neboli intenzita zvuku), tím také klesá vliv zvukové vlny na okolní prostředí.

Při pohybu zdroje tlakové poruchy je energetická hustota ve směru pohybu zdroje vyšší, protože se centrum zvukových vln pohybuje ve směru šíření. Naopak za zdrojem dochází k ředění,

772: $M < 1$



τ [s] čas. Kružnice 0, 1, 2, 3 představují hranici zvukových vln v prostředí v čase $\tau=0\dots3$. V čase 0 je zdroj právě na souřadnici 0 v čase 1 na souřadnici 1 atd. Tj. v bodě 0 vyvolá zdroj tlakovou poruchu, která se šíří rychlostí zvuku v kulové ploše, poté co urazí zdroj vzdálenost 0-R bude mít poloměr zvukové vlny označený na obrázku symbolem 0. Stejný postup platí i pro tlakovou poruchu vyvolanou zdrojem v bodě 1 atd.

viz Obrázek 772, na kterém je znázorněna tvorba zvukových vln na špici letounu.

Nadzvukové proudění

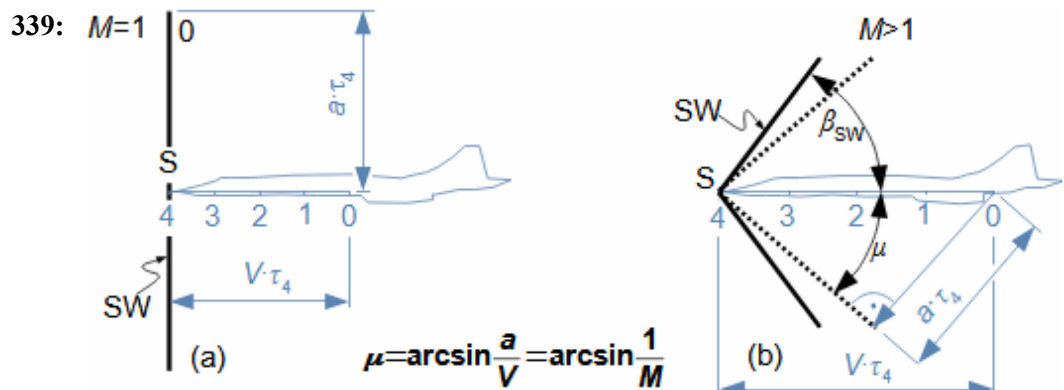
Rázové vlny

Úhel rázové vlny

Machův úhel

Pokud rychlost zdroje tlakové poruchy nebo proudění stlačitelného prostředí je blízká rychlosti zvuku nebo je dokonce vyšší, potom dochází k efektům narušující spojitost stlačitelného prostředí (skokové změny stavových veličin) a místo šíření tlakové poruchy formou zvukových vln se šíří formou tzv. rázových vln.

V případě, že se zdroj tlakové poruchy pohybuje rychlostí zvuku nebo vyšší ($M \geq 1$) je čelo tlakových poruch neustále v místě zdroje. To způsobí, že proudnice se před obtékaným tělesem pozvolna nerozestupují a toto těleso je nuceno svým objemem okolní plyn vytěsnit prudkou kompresí – energie ke kompresi plynu v rázové vlně je brána z pohybu tělesa. Takto zkomprimovaný plyn postupně expanduje směrem od tělesa. Hranici mezi zkomprimovaným plynem a okolním doposud neovlivněným plynem má tvar kužele a nazývá se rázová vlna (Obrázek 339). Sklon rázové vlny β_{SW} je dán rychlostí a velikostí tělesa a je vždy větší než úhel, který by vznikl při pohybu nekonečně tenkého tělesa stejnou rychlostí, tzv. Machův úhel μ .



(a) zdroj se pohybuje zvukovou rychlostí – rázová vlna je mírně skloněna dopředu; (b) zdroj se pohybuje nadzvukovou rychlostí. SW-rázová vlna (shock wave). β_{SW} [°] sklon rázové vlny ($\mu < \beta_{SW}$); μ [°] Machův úhel. Obrázek se nezabývá situací a velikostí rázových vln v čase před $\tau=0$ a ani situací za rázovou vlnou, tj. za obtékaným tělesem, tento problém je popsán v další části článku.

Zvuková vlna

Rázová vlna

Oproti zvukové vlně je rázová vlna stálá skoková změna stavových veličin (za rázovou vlnou je vyšší tlak, teplota i hustota. Situaci lze přirovnat k expandující kouli stlačeného plynu s tím, že vlivem pohybu tělesa je kompresí další plyn doplňován. Nicméně objem kužele roste s třetí mocninou doby pohybu a množství komprimovaného plynu je lineární (při konstantní rychlosti), takže se vzdáleností od špice kuželu rázové vlny klesá intenzita rázové vlny.

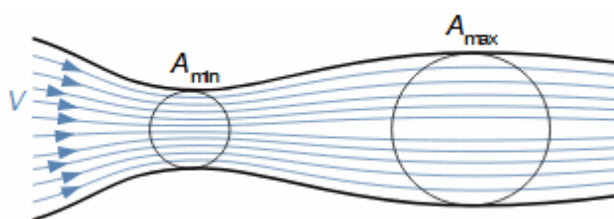
Zatím bylo znázorněno šíření zvukových vln nebo vznik rázových vln při pohybu tělesa, ale stejného efektu je dosaženo i v opačném případě, kdy těleso je v klidu a je plynem obtékáno či kombinací, tj. těleso je v pohybu v proudu plynu.

Hugoniotův teorém

Pierre Henri Hugoniot

Rovnici, která predikuje vznik rázových vln při stlačitelném proudění, respektive chování podzvukového a nadzvukového proudění publikoval v roce 1886 francouzský vynálezce, matematik a fyzik Pierre Henri Hugoniot (1851-1887), když se snažil popsat proudění na v ústí dělových hlavních, viz [Rovnice 818](#).

518:



$$\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V}(1-M^2) = 0$$

A [m] průtočný průřez. Tato rovnice se také označuje jako charakteristická rovnice proudění stlačitelné látky. Proudová trubice může být vytvořena pevnými stěnami nebo ostrou hranicí mezi dvěma prostředími s velmi odlišným stavem či vlastnostmi (kapalina versus plyn; řídký plyn versus rázová vlna na okraji apod.). Odvození Hugoniotova teorému je provedeno v [Příloze 518](#).

Kritická rychlost

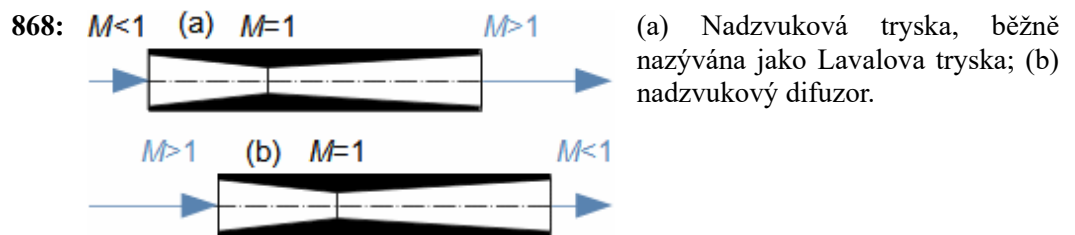
Podle Hugoniotova teorému bude při podzvukové rychlosti na vstupu do zužující se trubice ($M < 1$) docházet k nárůstu rychlosti a naopak, takže lze stanovit i místo v trubici, kde může proudění dosáhnout právě rychlosti zvuku ($M = 1$), musí to být v místě lokálního extrému $dA/A = 0$ – zbývá určit zda se jedná o minimální nebo o maximální průtočný průřez trubice. Z předchozího případu plyne, že nadzvukový proud dosáhne zvukové rychlosti pouze zmenšováním průtočného průřezu, proto rychlosti zvuku dosáhne proud v nejužším místě trubice. Zde dosáhne proudění lokální rychlosti zvuku – říkáme, že proudění dosáhlo kritické rychlosti V^* . Podle této rovnice by bylo možné teoreticky udržet zvukovou rychlost v celém objemu trubice konstantního průřezu, což v praxi není možné kvůli ztrátám.

Nadzvuková tryska

Lavalova tryska

Nadzvukový difuzor

Chování nadzvukového proudění je tedy přesně opačné než proudění podzvukového, díky tomu dva tvarově totožné kanály na [Obrázku 868](#) fungují zcela odlišně při podzvukovém a nadzvukovém proudění na vstupu. Zobrazený kanál se chová jako nadzvuková tryska, jestliže do kanálu vstupuje podzvukové proudění ([Obrázek 868\(a\)](#)), které zvyšuje svou rychlost až na $M = 1$ v nejužším průřezu, za tímto průřezem se rychlost dále zvyšuje až na vysoce nadzvukovou výstupní rychlost. Naopak



zobrazený kanál se chová jako nadzvukový difuzor, jestliže do kanálu vstupuje nadzvukové proudění, které snižuje svou rychlost na $M=1$ v nejužším průřezu, za kterým se rychlost dále snižuje až na nízkou podzvukovou rychlost, tím se transformuje kinetická energie nadzvukového proudu na tlakovou energii.

Rázová vlna

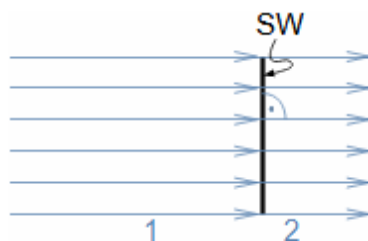
Expanzní vlna

Z Hugoniotova teorému je zřejmé, že jediný možný způsob plynulého přechodu nadzvukového proudění ($M > 1$) do podzvukového ($M < 1$) je postupným zmenšováním průtočného průřezu až do okamžiku $M=1$ (kdy $A=\min$) a následně jeho zvětšováním pro dosažení ($M < 1$). Stroje, ve kterých může docházet k takto vysokým rychlostem lze reálně konstruovat jen pro konkrétní podmínky (lze dokázat, že poměr výstupního průtočného průřezu ku minimálnímu průřezu musí být pro rozdílná Machova čísla také rozdílná), při změně podmínek by bylo nutné měnit geometrii stroje, aby splňoval požadavky na přechod proudění z nadzvukového do podzvukového. To často není možné splnit a přechod se uskuteční v rozšiřující se části proudové trubice skokem, tj. skokovou změnou stavových veličin tedy rázovou vlnou, jen tak lze splnit podmínky Hugoniotova teorému (plynulý přechod není v takovém kanále možný). Přičemž existuje několik základních druhů rázových vln podle podmínek, za jakých vznikly, viz následující kapitoly. Při přechodu z podzvukového do nadzvukového proudění k náhlým (skokovým) změnám stavových veličin sice nedochází, ale obecně se chování nadzvukové expanze natolik odlišuje od podzvukové, že se označuje jako expanzní vlna, která je podrobněji popsána v jedné z další kapitol.

Přímá (kolmá) rázová vlna

V kolmé rázové vlně se téměř skokově mění (její tloušťka je cca 10^{-7} m [Hloušek, 1992]) stavové veličiny plynu, tak jak je uvedeno na [Obrázku 519](#). Po průchodu kolmou rázovou vlnou zůstává směr proudění stejný, ale mění se rychlost a hybnost proudu – za kolmou rázovou vlnou je vždy rychlost nižší, než je rychlost zvuku. Kolmé rázové vlny vznikají v kanálech a kolem osamocených těles při zvukové rychlosti proudu.

519:



$$M_1 > 1 \Rightarrow M_2 < 1$$

$$V_1 \Rightarrow V_2 < a$$

$$p_1 \Rightarrow p_2 > p_1$$

$$V_1 \cdot V_2 = V^{*2}$$

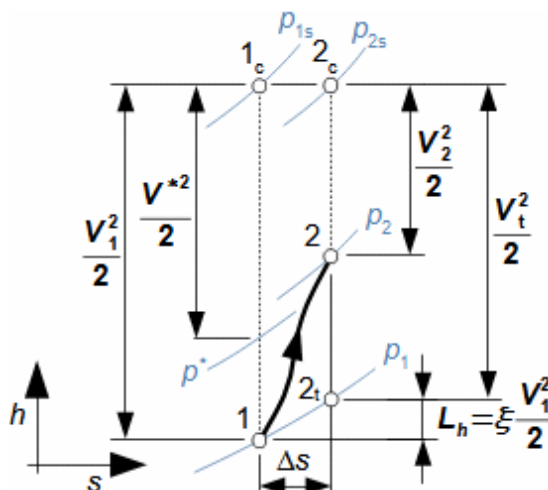
1-stav plynu před rázovou vlnou;
2-stav plynu za rázovou vlnou.
 p [Pa] tlak; V^* [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] kritická rychlost proudění. Odvození rovnic pro kolmou rázovou vlnu je provedeno například v [Macur, 2010, s. 372].

Ludwig Prandtl

Ztráty v rázové vlně

Energetickou bilanci kolmé rázové vlny s uspokojivým výsledkem poprvé stanovil německý fyzik Ludwig Prandtl (1875-1953, působil na univerzitě v Göttingenu; mimo jiné také významně přispěl k popisu proudění v Lavalových tryskách) zavedením předpokladu, že při skokové změně stavových veličin v rázové vlně dochází ke ztrátám, což se do té doby nepředpokládalo. Znamená to, že za kolmou rázovou vlnou má plyn vyšší entropii než před ní, což je dobře patrné z h - s diagramu rázové vlny na [Obrázku 338](#).

338:



h [$\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$] entalpie plynu; s [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] entropie plynu; L_h [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$] ztráta v rázové vlně; p^* [Pa] kritický tlak (tlak, při kterém proudění při expanzi z bodu $1s$ dosáhne rychlosti zvuku); V_t [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] teoretická rychlost plynu při izoentropické expanzi z tlaku p_{2s} do tlaku p_1 ; ζ [1] poměrná ztráta rázem.

Rankine-Hugoniotovy rovnice

Ztráta v rázové vlně nezávisí přímo na geometrii obtékaného tělesa, ale pouze na vlastnostech plynu a jeho rychlosti, což je patrné z Rankine-Hugoniotových rovnic pro stav plynu před a za vlnou, viz [Rovnice 333](#) a také z výpočtu [Úlohy 896](#).

333:

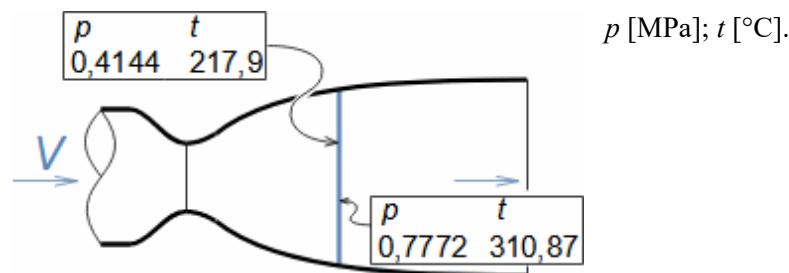
$$M_2^2 = \frac{\frac{\kappa-1}{2} M_1^2 + 1}{\kappa M_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Rovnice jsou odvozeny pro stabilní kolmou rázovou vlnu a ideální plyn. Odvození rovnic je provedeno v [Příloze 333](#).

Úloha 896:
Ztráta v rázové vlně

Lavalova tryska

V Lavalově trysce vznikla kolmá rázová vlna. Vypočítejte ztrátu při průchodu plynu touto vlnou. Naměřený tlak a teplota před a za vlnou jsou na přiloženém obrázku. Vypočítaná rychlost před vlnou z průřezu trysky a hmotnostního průtoku je $583,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tryskou proudí suchý vzduch. Řešení úlohy je uvedeno v [Příloze 896](#).



Postup řešení Úlohy 896

1. zadání:	$V_1; t_1; p_1; p_2; t_2$	3. výpočet:	L_h
2. odečet:	$h_1; h_{1s}; s_2; h_{2t}$		

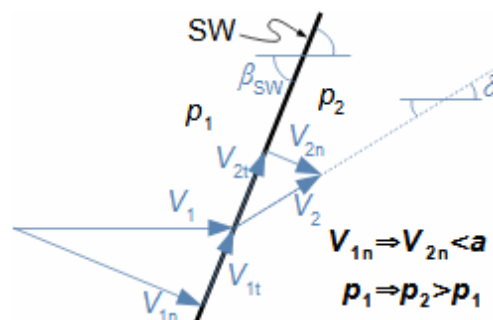
Šikmá rázová vlna

Normálová složka rychlosti

Odklon proudu

Před šikmou rázovou vlnou musí být rychlost nadzvuková, ale za ní může být proudění podzvukové i nadzvukové. Při průchodu proudění šikmou rázovou vlnou dochází navíc ke změně směru proudu o úhel δ , jak je zobrazeno na Obrázku 107. přičemž pro normálové složky rychlosti šikmé rázové vlny V_{1n} , V_{2n} platí stejné vlastnosti jako pro proudění procházející kolmou rázovou vlnou, viz Úloha 1007. Lze dokázat rovnost (např. [Kadrnožka, 2004, s. 126-127]) tečných složek rychlosti $V_{1t} = V_{2t}$.

107:



δ [°] odklon proudění za rázovou vlnou od původního směru. Index n označuje normálové složky rychlosti, Index t označuje tečné složky rychlosti

Úhel rázové vlny

Machův úhel

Zvuková vlna

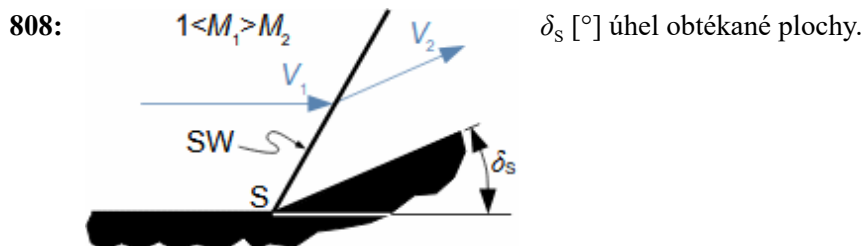
Ztráty v rázové vlně

Nadzvukové rychlost

Dále z analýzy vlastností šikmé rázové vlny plyne, že pokud je úhel β_{SW} stejný jako Machův úhel μ , pak musí platit $V_{1n} = a$ a jedná se pouze o zvukovou vlnu, což plyne z definice Machova úhlu. Dále lze dokázat, že k největší energetické ztrátě (nárůstu entropie) dochází při $\beta_{SW} = 90^\circ$ – to znamená, že ztráty v šikmé rázové vlně jsou menší než v kolmé pro stejný tlakový poměr tlaků před a za vlnou.

Šikmá rázová vlna vzniká například na hranách profilů pohybujících se nadzvukovou rychlostí, nebo pokud jsou obtékány nadzvukovým proudem, viz níže. Šikmou rázovou vlnu může vytvořit i nerovnost na obtékané ploše (výrobní nerovnost, kapička nestlačitelné tekutiny v nadzvukovém proudu atd.) či rozhraní mezi nadzvukovým proudem a okolním prostředím, typickým příkladem je nadzvukový výtok plynu z Lavalovy

trysky. Šikmá rázová vlna vzniká také tam, kde se náhle zmenší průtočný průřez nadzvukovému proudění, jak je znázorněno na Obrázku 808. Podobným způsobem může vzniknout šikmá rázová vlna i při šikmém střetu dvou nadzvukových proudů, jak naznačuje Obrázek 522. Jestliže je úhel plochy δ_s větší než odpovídá úhlu rázové vlny δ podle Obrázku 107, potom se rázová vlna posune ještě před začátek klínu [Dejč, 1967, s. 150]. Zajímavá situace nastane v případě, jestliže náhle zvedající se plocha je nahrazena obloukem, viz následující kapitola.

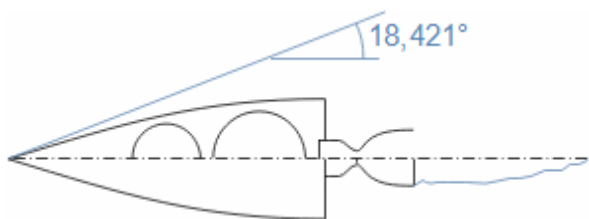


Raketový motor
 N_2O_4

Změny směru proudu při průchodu rázovou vlnou se využívá k záměrné změně směru nadzvukového proudění, například k řízení vektoru tahu raketových motorů na tuhá paliva. V takovém případě je rázová vlna vytvořena pomocí kapičky nestlačitelné kapaliny (například N_2O_4) vstříknuté na vnitřní stranu trysky. Rázová vlna se iniciuje na této hranici kapičky.

Úloha 1007:
 Úhel rázové vlny

Jaký úhel rázové vlny vytvoří raketová střela, při rychlosti $M=2,5$? Jaká bude rychlost, teplota a tlak v proudu za vlnou? Geometrie střely je na obrázku. Ostatní parametry jsou: $\kappa=1,4$, $t_1=20$ °C, $p_1=101\,325,25$ Pa, $r=287$ J·kg⁻¹·K⁻¹. Tepelnou kapacitu pro tento případ dejte rovnu 1 kJ·kg⁻¹·K⁻¹. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 1007.



Postup řešení Úlohy 1007

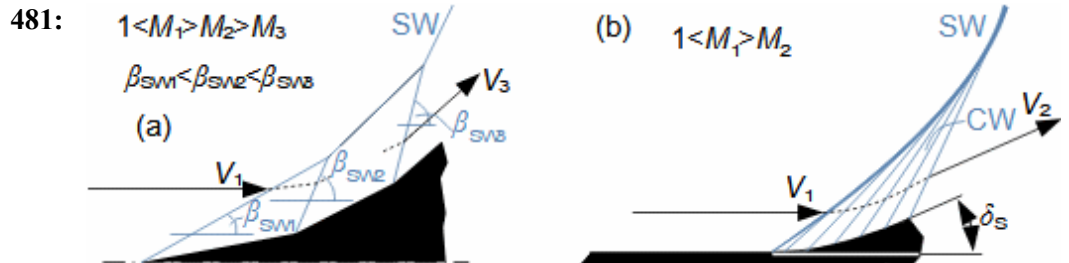
1. zadání: $\beta_s; M; \kappa; t_1; p_1; r; C_p$	4. výpočet: $M_{2n}; t_2; V_{2t}$
2. odhad: β_{sw}	5. porovnání: V_{1t} vs. V_{2t} , jestliže se liší více než je povolená přesnost, pak provést nový odhad β_{sw} a opakovat výpočet od ř. 2
3. výpočet: $V_{1t}; M_{1n}$	6. Výpočet: $V_2; p_2$

C_p [J·K⁻¹·kg⁻¹] tepelná kapacita 1 kg pracovního plynu

Nedosažitelné kompresní vlny

Kumulace rázových vln

Kompresní vlna je útvar ekvivalentní rázové vlně. Jedná se o plynulou izoentropickou kompresi nadzvukového proudění ve zužujícím se prostoru tak, jak popisuje Hugoniotův teorém. V praxi ale tento děj není uskutečnitelný, protože snižování průtočného průřezu by muselo být nekonečně malé [Dejč, 1967, s. 405]. Nejblíže ideálním kompresním vlnám je kumulace rázových vln (Obrázek 481). Pokud totiž za šikmou rázovou vlnou vznikne další šikmá rázová vlna, pak tato vlna bude mít větší úhel, takže tyto dvě vlny se v určité vzdálenosti od místa vzniknu střetnou. V místě střetu se sečtou jejich účinky, tj. hybnost a tlak, tím vznikne nová šikmá rázová vlna s úhlem odpovídající tomuto součtu. Přitom každá kompresní vlna představuje drobné zvýšení tlaku, současně se zvětšuje jejich sklon, protože se snižuje Machovo číslo, to znamená, že v místě kde se protnou bude tlak roven součtu zvýšení tlaků v jednotlivých kompresních vlnách, tak v těchto místech vzniká šikmá rázová vlna o nižší intenzitě, než je intenzita původních vln v místě zdroje tlakové poruchy. Proudění dále od plochy tedy prochází šikmou rázovou vlnou s větším úhlem β_{SW} než při okrajích.



(a) stupňující se plocha; (b) vznik kompresních vln u pozvolna se zvedající plochy [Nožička, 2000]. CW-soustava kompresních vln.

Zředění rázové vlny

V letectví se provádí experimenty se snižování zvukových efektů způsobené rázovými vlnami při nadzvukových letech založené na rozdělení rázové vlny na několik dílčích vln (zředění rázové vlny, viz Obrázek 905). Tímto způsobem se sníží nejen ztráty v rázových vlnách, ale především se tím dosáhne co

905:



Projekt Quiet Spike se úspěšně zabýval možností snížit intenzitu zvukových efektů pomocí odstupňovaně prodloužené přídě letounu. Zde testování teleskopické přídě letounu F-15B [Creech, 2009].

největšího úhlu výsledné rázové vlny (poté co se setkají všechny rázové vlny od trupu letounu). Čím je totiž úhel rázové vlny větší (nejlépe 90°), tím je zvukový efekt od vlny menší [Hošek, 1962, s. 60] – což by umožňovalo dopravním letounům alespoň omezeně let vysokou rychlostí i nad obydlenými oblastmi.

λ -rázová vlna

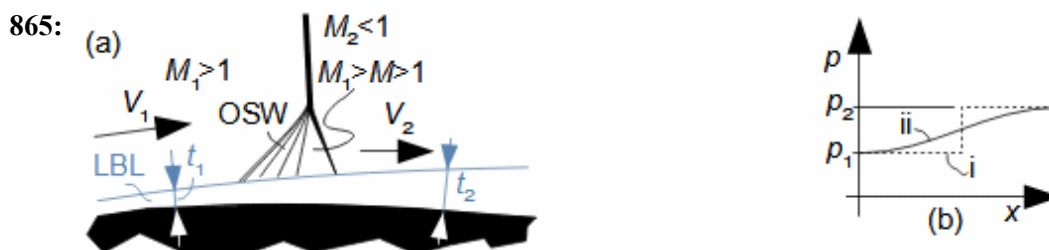
Transonické proudění

Mezní vrstva

Laminární proudění

Turbulentní proudění

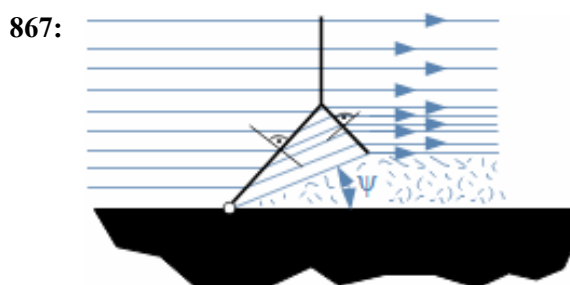
λ -rázová vlna (Obrázek 865) vzniká při obtékání těles transonickou rychlostí s laminární mezní vrstvou. Protože v mezní vrstvě je podzvukové proudění, zvyšuje se v ní tlak postupně zároveň na úkor rychlosti. Tím se zvětšuje její tloušťka a vzniká klín od kterého dochází ke kumulaci šikmých rázových vln, což je dobře patrné na zjednodušeném schématu λ -rázové vlny na Obrázku 867. Výsledná rázová vlna je často mírně skloněna dopředu [Hošek, 1949]. V případě turbulentního proudění je klín velmi malý (turbulentní proudění není tak citlivé na změnu tlaku) a na hranici mezní vrstvy vzniká přímo kolmá rázová vlna.



(a)-celkový náhled na λ -rázovou vlnu; (b) průběh změny tlaku v λ -rázové vlně a v mezní vrstvě. LBL-laminární mezní vrstva (laminar boundary layer); i-průběh tlaku v jádru proudu těsně před a za rázovou vlnou; ii-průběh tlaku v laminární mezní vrstvě; OSW-druhotné šikmé rázové vlny vznikající v důsledku zvětšení tloušťky mezní vrstvy (oblique shock waves). t [m] tloušťka mezní vrstvy; x [m] vzdálenost od nátokové hrany profilu.

Održení mezní vrstvy

Obecně je ztráta v λ -rázové vlně menší než u přímé rázové vlny a větší než u šikmé [Hošek, 1949, s. 201]. Z toho je také zřejmé, že proudnice, jenž prošly šikmými rázovými vlnami (ta část λ -vlny blíže k profilu), budou mít jinou rychlost (i když podzvukovou), než proudnice, které prošly přímo přes přímou



Princip odtržení proudu od profilu za λ -rázovou vlnou

rázovou vlnu. Navíc ke ztrátě rázovou vlnou je nutné přičíst ztrátu odtržením od profilu, která vzniká za λ -rázovou vlnou [Hošek, 1949, s. 198], [Kadrnožka, 2004, s. 132], viz Obrázek 867.

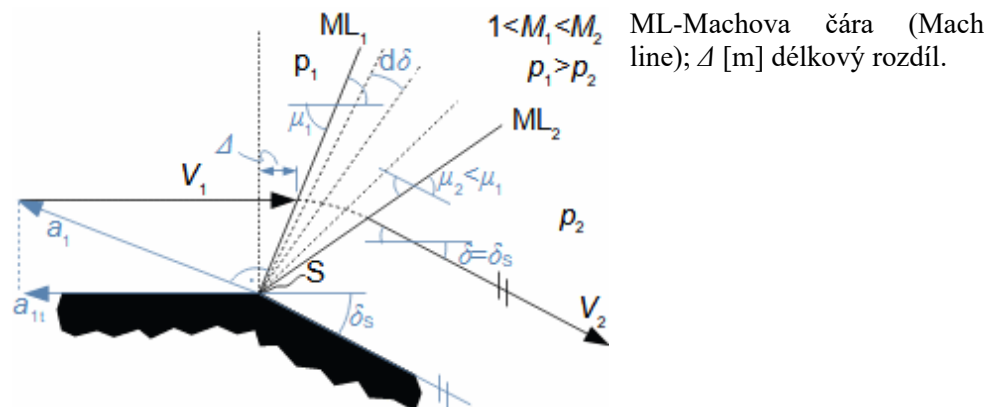
Expanzní vlny

Pokud se nadzvukové proudění dostane do prostoru se zvyšujícím se průtočným průřezem musí expandovat do vyšší rychlosti, jak predikuje Hugoniotův teorém. Taková nadzvuková expanze probíhá formou expanzních vln.

Odklon proudu

Zvyšující se průtočný průřez vytvářejí i tupé úhly na tělesech, například odtoková hrana projektilů, místa počátku zužování trupu letounů apod., viz Obrázek 340, na kterém je typická charakteristika obtékání tupého úhlu nadzvukovou rychlostí. Při obtékání tupých úhlů nadzvukovou rychlostí musí docházet k expanzi plynu z tlaku p_1 na tlak p_2 a ke zvýšení rychlosti proudu z V_1 na V_2 , zároveň dojde i k vychýlení směru proudícího plynu o úhel δ od původního směru. V expanzní vlně nedochází ke skokové, ale pozvolné změně stavových veličin při expanzi s velmi nízkými ztrátami (izoentropická expanze).

340:



Machova čára

Vznik expanzní vlny na Obrázku 340 iniciuje tlaková porucha na hraně S, která se šíří proti proudění rychlostí a_{1t} . První proudnice zareaguje okamžitě a začne expandovat do tlaku nižšího změnou směru proudění ve směru poklesu tlaku. Vzdálenější proudnice expanduje až za hranou S, protože než k ní dorazí tlaková porucha urazí vzdálenost Δ . Hranice ML_1 , na které se začne měnit směr proudění a plyn expandovat je tzv. Machova čára nebo také první expanzní vlna. Je evidentní, že sklon této čáry je roven Machovu úhlu μ_1 . Na první Machově čáře započne tedy expanze plynu. Při expanzi dochází ke změně Machova čísla a i expanze mění svůj charakter, protože se mění

Machův úhel. Expanze se ukončí na Machově čáře ML_2 , na které proudící plyn dosáhne tlaku p_2 . První a poslední Machova čára vytváří Machův klín, ve kterém expanze plynu probíhá. Přičemž hodnotu úhlu δ lze stanovit z Prandtl-Meyerovy funkce ν [ANON., 2010], viz [Rovnice 521](#).

$$521: \delta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad \nu(M) \text{ [}^\circ\text{] Prandtl-Meyerova funkce}$$

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \arctan \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M^2-1)} - \arctan \sqrt{M^2-1}$$

Odklon proudu

Prandtl-Meyerovy funkce

Maximálního úhlu odklonu proudu při průchodu v expanzní vlnou δ_{\max} a maximální rychlosti $V_{2\max}$ dosáhne proudění při expanzi do vakua $p_2=0$. Při expanzi do vakua bude $M_2=\infty$. Jestliže úhel sklonu hrany bude větší než δ_{\max} vznikne za hranou S mezi proudem a obtékanou plochou vakuum.

Šikmo seříznutá tryska

Expanzní vlny mohou také vznikat při nadzvukových rychlostech proudění ve výtoku z kanálů, například v šikmo seříznutých tryskách a velké problémy dělá i při nadzvukovém výtoku z lopatkového kanálu.

Vliv stlačitelnosti proudu při vysokých rychlostí na aerodynamiku těles

Výše zmíněné efekty vznikají v okolí obtékaného profilu při transonických a zvukových a nadzvukových rychlostech. Přičemž ve všech třech druzích rychlostí se obvykle vyskytuje jiný typ efektů, respektive se rychlosti obtékání profilu v jednotlivých bodech se mění různě. Stlačitelnost proudu při vysoké rychlosti ovlivňuje samozřejmě i výsledné aerodynamické veličiny profilů jako součinitel vztlaku a odporu, takže výsledky měření těchto veličin při nízkých podzvukových rychlostech se musí přepočítat pomocí Glauert-Prandtlovo pravidla, pokud je nutné z nich vycházet při aerodynamických výpočtech pro vysoké rychlosti. V neposlední řadě ovlivňuje stlačitelnost i aerodynamiku letu letounu při vysokých rychlostech, takže chování letounu je jiné než při nízkém podzvukovém letu.

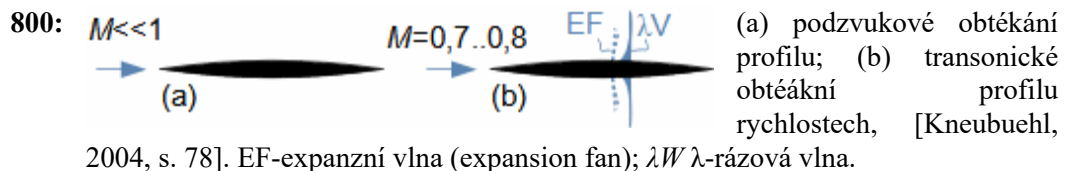
Rychlost kolem profilu

Transonická rychlost

Rychlost kolem profilu tělesa se při podzvukovém proudění postupně zvyšuje a poté co se začne profil zužovat se začne i rychlost snižovat – žádné efekty nesledujeme, viz [Obrázek 800\(a\)](#). Při kritickém Machovu čísle, respektive při transonické rychlosti, může rychlost v nějakém místě v okolí profilu při jeho

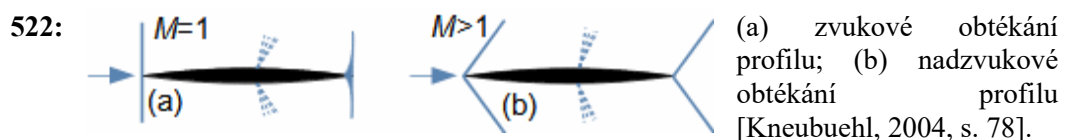
Expanzní vlny
 λ -rázová vlna

obtěkání dosáhnout i rychlosti zvuku, to způsobí, že v místě, ve kterém se profil začne zužovat vzniknou expanzní vlny, a rychlost proudění se za tímto bodem ještě více zvýší. Protože rychlost na konci profilu musí být opět podzvuková pro zachování kontinuity proudu, tak musí před odtokovou hranou vzniknout rázová vlna (spojitý přechod není možný), a protože u krátkých profilů je mezní vrstva laminární, pak tato rázová vlna bude λ -rázová vlna, viz Obrázek 800(b).



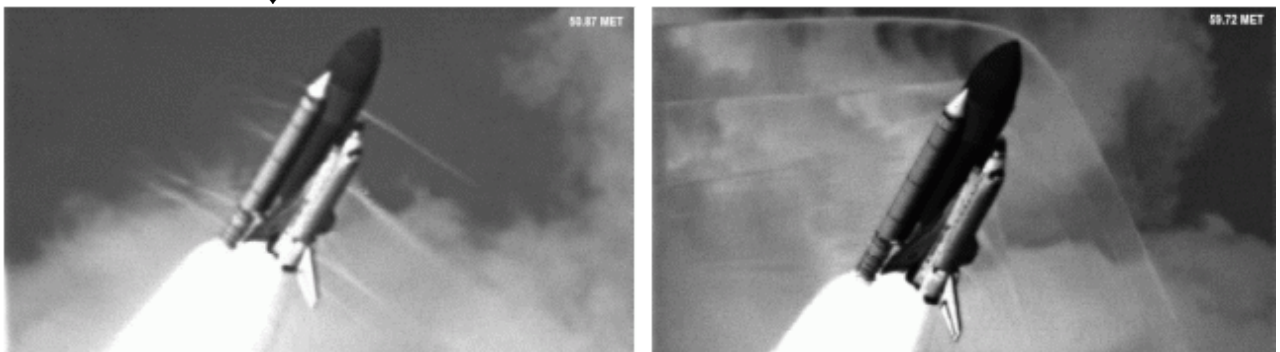
Zvuková rychlost
 Kolmá rázová vlna
 Nadzvuková rychlost
 Šikmá rázová vlna

Čím větší je rychlost před profilem, tím více se vznik λ -rázových vln posouvá k odtokové hraně profilu – při rychlosti zvuku proudu před profilem se posune až na konec odtokové hrany a na náběžné hraně profilu se začne tvořit kolmá rázová vlna (Obrázek 522(a)) a λ -rázová vlna se posune až na odtokovou hranu profilu. Při nadzvukové rychlosti se přetvoření čelní kolmá rázová vlna na šikmou a to samé se stane na odtokové hraně, kde se vytvoří dvě šikmé rázové vlny srážkou dvou nadzvukových proudů od sací a přetlakové strany profilu, viz Obrázek 522(b).



Při pohybu tělesa od startu až po vysokou nadzvukovou rychlost lze sledovat vznik prakticky všech fází efektů popsaných v předchozích odstavcích, viz Obrázek 897, který zachycuje start raketoplánu Discovery (STS-114, 2005). Vlevo je snímek v čase 50,87 s po startu (1,2 Mach, aerodynamický odpor dosahuje maxima), vpravo je snímek v čase 59,72 s (1,5 Mach aerodynamický odpor klesá).

897↓



Zdroj fotografií [O'Farrell and Rieckhoff, 2011].

Glauert-Prandtlovo pravidlo

Tlakový součinitel

Součinitel vztlaku

Součinitel odporu

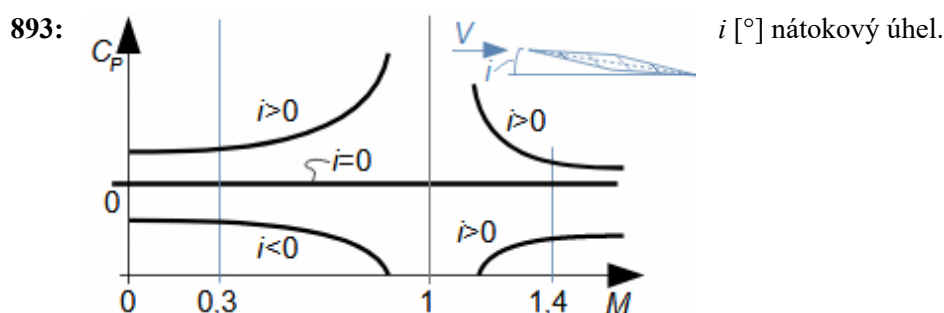
Laminární profil

V případě, že při proudění kolem lopatky dochází k výraznější změně hustoty (oproti podmínkám při kterých byly aerodynamické veličiny profilu měřeny) už některé ze vzorců a pravidel odvozených pro nestlačitelné proudění lze použít s dostatečnou přesností pouze, jestliže aerodynamické veličiny přepočítáme pro jiné parametry proudění podle Glauert-Prandtlova pravidla. Glauert-Prandtlovo pravidlo je tvořeno vztahy (viz [Rovnice 906](#)), kterými lze přepočítat základní aerodynamické veličiny profilu naměřené pro nestlačitelné proudění na případ, kdy je proudění stlačitelné. Tyto rovnice mají omezenou platnost, respektive je lze použít pouze pro rychlosti proudění nepřekračující kritické Machovo číslo ani kritické Reynoldsovo číslo – profily, u kterých proudění nepřekračuje kritické Reynoldsovo číslo se nazývají laminárními profily. Uvedené rovnice dobře odpovídají experimentálním měření [Abbott and Doenhoff, 1959, s. 256 a s. 283-287], [Hošek, 1949, s. 52].

$$906: \quad (a) \frac{C_{P,c}}{C_{P,i}} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \quad (b) \frac{C_{L,c}}{C_{L,i}} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \quad (c) C_{D,c} \approx C_{D,i}$$

(a) Glauert-Prandtlovo pravidlo pro tlakový součinitel profilu; (b) Glauert-Prandtlovo pravidlo pro součinitel vztlaku; (c) vliv zvyšování rychlosti na součinitel odporu. C_D [1] součinitel odporu profilu; C_L [1] součinitel vztlaku profilu; M [Mach] Machovo číslo (před profilem); C_p [1] tlakový součinitel profilu. Index $_i$ označuje nestlačitelné proudění (incompressible), index $_c$ stlačitelné proudění (compressible). Odvození je uvedeno v [Hošek, 1949, s. 49].

Rovnice Glauert-Prandtlova pravidla má smysl použít zhruba od 0,3 Mach, přičemž v blízkosti rychlosti zvuku už jejich přesnost klesá, protože výsledky výpočtu jdou do extrémů na rozdíl od naměřených hodnot (viz porovnání výpočtu podle G-P pravidla s měřením v [Hošek, 1949, s. 345]). Nelze je použít ani pro nadzvukové rychlosti, kde podle měření, součinitel vztlaku opět klesá až kolem $M=1,4$ přestává být závislý na Machovu číslu, viz [Obrázek 893](#), na kterém křivky do hodnoty $M=1$ jsou podle G-P pravidla.



Součinitel odporu

Změna součinitele odporu C_p nastává až při transonických rychlostech, kdy vznikají λ -rázové vlny. Po opuštění transonické oblasti při vzniku šikmých rázových vln součinitel odporu opět klesá, jak je ukázáno na příkladu obtékání vzduchu kolem trupu raketoplánu na Obrázku 897.

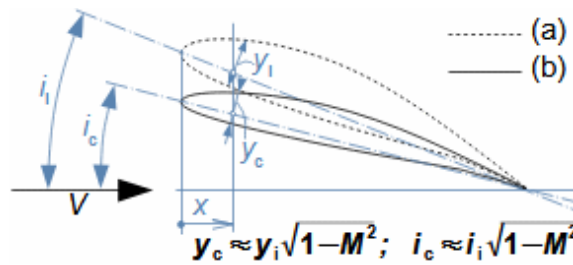
Glauert-Prandtlovo pravidlo

Profil

Nátokový úhel

Glauert-Prandtlovo pravidlo lze použít i obráceně – lze určit jak by se měl změnit profil a nátokový úhel profilu při vysokých rychlostech, aby měl stejné aerodynamické vlastnosti jako při nízkých rychlostech, viz Rovnice 907. Souřadnice profilu rovnoběžné s rychlostí zůstávají stejné [Hošek, 1949, s. 57].

907:



(a) profil obtékáný nestlačitelným prouděním; (b) profil obtékáný stlačitelným prouděním. x [m] souřadnice profilu ve směru nátokové rychlosti; y_i , y_c [m] lokální tloušťka profilu obtékaného nestlačitelným, respektive

stlačitelným prouděním.

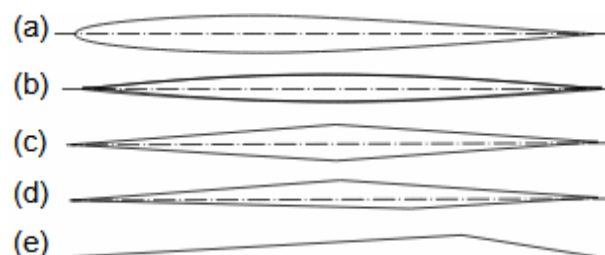
Z výše uvedeného je evidentní, že pro vyšší rychlosti obtékání postačují tenké málo zakřivené profily, čehož si každý všimne u stíhacích nadzvukových letounů, které jsou štíhlejší než podzvukové stroje.

Aerodynamika letu

Profil

Při letu vysokou rychlostí přibývají na profily křídel další požadavky zejména předvídatelnost vzniku efektů spojených s vysokou rychlostí a jejich vlivu na let. Největším problémem je vznik expanzních vln a především λ -rázových vln, které způsobují odtrhávání proudu od profilů a tedy ztrátu vzlaku. Nejlépe těmto efektům odolává kosočtvercový profil. Expanzní vlny vznikají pouze na jediné hraně mezi nátokovou a odtokovou stranou a λ -rázové vlny vznikají až u odtokové hrany profilu. Samozřejmě tento profil není vhodný pro nízké podzvukové rychlosti, takže se hledají různé kompromisy tvarů profilů podle toho pro jaké rychlosti jsou primárně určeny, viz Obrázek 894. Přitom se využívá faktu, že kritické Machovo číslo roste s klesající tloušťkou profilu, protože klesá rozdíl mezi nátokovou rychlostí a maximální rychlostí v okolí profilu.

894:



(a) transonický profil; (b) supersonický (čočkový tvar); (c) supersonický (kosočtvercový tvar); (d) supersonický (lichoběžníkový tvar); (e) hypersonický.

Vztlak
Působíště síly
Nátokový úhel

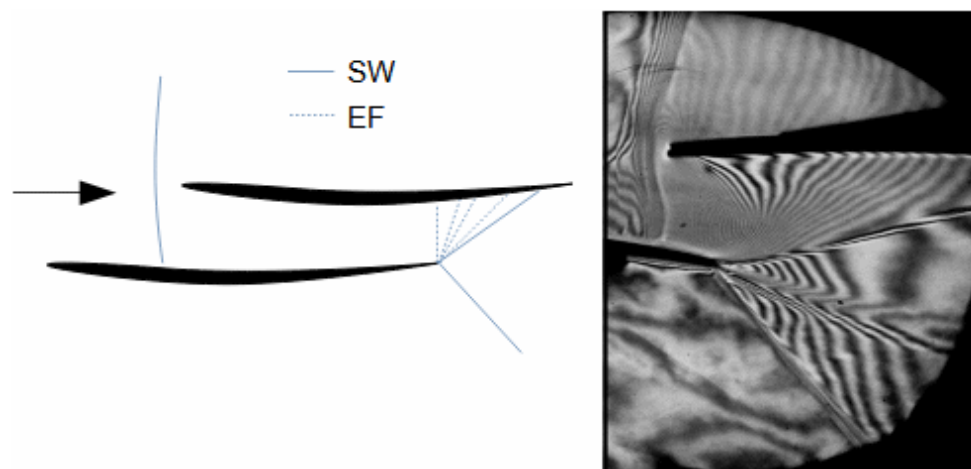
Další problém, které vysoké rychlosti způsobují je změna působíště vztlaku. S rostoucím Machovým číslem se totiž pohybuje působíště výslednice síly na profil více k jeho nátokové hraně, při rychlosti blízké rychlosti zvuku se opět poloha působíště sil přibližuje zpět do původní polohy [Hošek, 1949, s. 46, 240]. Nejen z [Obrázku 893](#) již víme, že se podstatně zvyšuje i velikost vztlaku. Proto moderní letouny jsou vybaveny zařízeními pro změnu geometrie křídla či přesunu těžiště, a zejména při rychlostech kolem rychlosti zvuku mění náklon kvůli udržení takových nátokových úhlů, aby vztlak udržely v požadované velikosti – při velmi vysokých podzvukových rychlostech může být dokonce i záporný [Stever and Haggerty, 1966, Flight, s. 69].

Aerodynamika profilových mříží ve stlačitelném prostředí

Odklon proudu
Ztráty v rázové vlně
Expanzní vlny
Rázové vlny

Efekty spojené se stlačitelným prouděním při vysoké rychlosti vnikají samozřejmě i v kanálech profilových mříží. Na [Obrázku 636](#) je interferogram (fotografie zachycující změny hustot plynu) nadzvukové proudění turbínovou profilovou mříží, přičemž na vstupu je rychlost 1,19 Mach a na výstupu rychlost, který by při izoentropickém proudění odpovídala rychlosti 2,003 Mach. V okolí výstupní části profilové mříže jsou jasně patrné expanzní vlny a vznik rázových vln na odtokové hraně při srážce dvou nadzvukových proudů. Při průchodu těmito vlnami se mění směr proudění, což je typický problém vznikající na výstupu z profilové mříže při nadzvukovém proudění. V tomto případě je

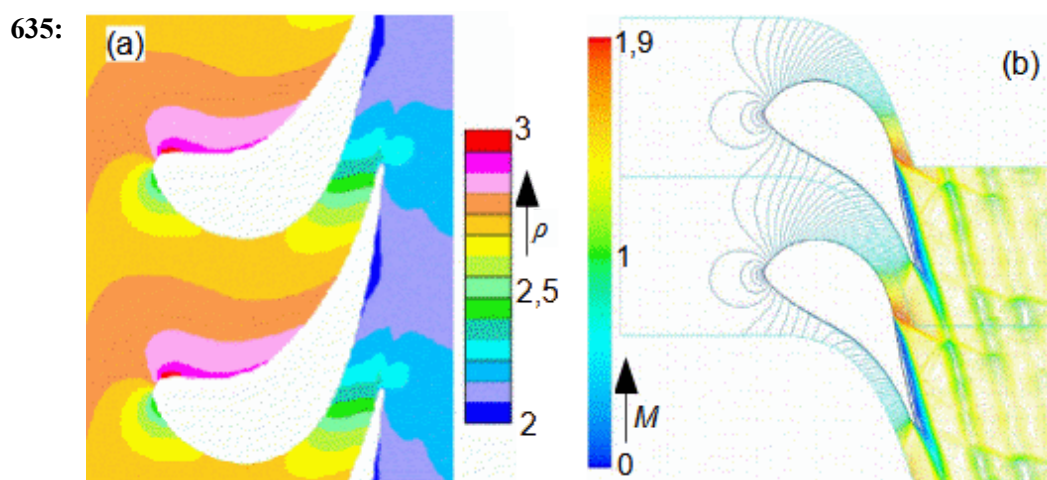
636:



vlevo-schéma situace zaznamenané na interferogramu; vpravo-interferogram nadzvukového proudění turbínovou mříží. Pořízeno Machovým-Zehnderovým interferometrem. Pořádila a snímky poskytla Aerodynamická laboratoř v Novém Kníně při Ústavu termomechaniky AVČR, v.v.i.

již na vstupu nadzvukové proudění, takže na nátokových hranách profilů vznikají šikmé rázové vlny. Přitom všechny druhy vln zvyšují ztráty při průtoku mříží.

Analytické řešení stlačitelného proudění v profilové mříži je možné řešit v uzavřeném tvaru pouze pro případ jednorozměrného stlačitelného proudění v kanále – to je ekvivalentní analytickému návrhu trysek nebo difuzorů. Přesnějších výsledků, které berou v úvahu prostorových charakter proudění, lze dosáhnout numerickým modelováním pomocí výkonného výpočetního hardwaru a příslušného softwaru, viz Obrázek 635.



(a) pracovní plyn vodní pára $M_1=0,42$ (před mříží), $M_2=0,7$ (za mříží), vytvořeno na Energetickém ústavu FSI VUT v Brně; (b) turbínová lopatková mříž, pracovní plyn vzduch [Tajč et al., 2007]. M [Mach]; ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$] hustota.

Odkazy

- ŠKORPÍK, Jiří, 2019, Technická termomechanika, *Transformační technologie*, Brno, [on-line], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://www.transformacni-technologie.cz/43.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2021, Technická matematika, *Transformační technologie*, Brno, [on-line], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://www.transformacni-technologie.cz/42.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2022, Základní rovnice lopatkových strojů, *Transformační technologie*, Brno, [on-line], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://turbomachinery.education/zakladni-rovnice-lopatek-nych-stroju.html>.
- ABBOTT, Ira, DOENHOFF, Albert, 1959, *Theory of wing sections, including a summary of airfoil data*, Dover publications, inc., New York, ISBN-10:0-486-60586-8.
- ANON., 2010, *Expansion fan – Isentropic flow*, National Aeronautics and Space Administration – NASA, Washington, D.C., <http://www.grc.nasa.gov>.
- CREECH, Gray, 2009, *Supersonic Jousting*, National Aeronautics and Space Administration – NASA, Washington, D.C.
- DEJČ, Michail, 1967, *Technická dynamika plynů*, SNTL, Praha.
- HLOUŠEK, Jiří, 1992, *Termomechanika*, Vysoké učení technické v Brně, Brno, ISBN 80-214-0387-X.
- HOŠEK, Josef, 1949, *Aerodynamika vysokých rychlostí*, Naše vojsko, Praha.
- HOŠEK, Josef, 1962, *Dnešní letectví: nové vývojové směry v letectví*, Práce, Praha
- KADRNOŽKA, Jaroslav, 2004, *Tepelné turbíny a turbokompresory*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, ISBN 80-7204-346-3.

- KNEUBUEHL, Beat, 2004, *Balistika střely, přesnost střelby, účinek*, Naše vojsko, Praha, ISBN 80-206-0749-8.
- MACUR, Milan, 2010, *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*, Vutium, Brno, ISBN 978-80-214-3944-3.
- NOŽIČKA, Jiří, 2000, Osudy a proměny trysky Lavalovy, *Bulletin asociace strojních inženýrů*, č. 23, ASI, Praha.
- O'FARRELL, J.M., RIECKHOFF, T.J., 2011, *Direct Visualization of Shock Waves in Supersonic Space Shuttle Flight*, George C. Marshall Space Flight Center, AL 35812 – Technical Memorandum.
- STEVER, Guyford, HAGGERTY James, 1966, *Flight*, Time Inc.
- TAJČ, Ladislav, BEDNÁŘ, Lukáš, POLANSKÝ, Jiří, Šťastný, Miroslav, 2007, Radial Control Stage with Partial Steam Admission, *Proceedings of the 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows*, Lyon.
-