

# MACHOVO ČÍSLO A EFEKTY PŘI PROUDĚNÍ VYSOKÝMI RYCHLOSTMI

*Jiří Škorpík, skorpik.jiri@email.cz*

- 3.3 ..... Základní pojmy v proudění vysokými rychlostmi
- 3.4 ..... Dopady konečné velikosti rychlosti zvuku na kontinuitu proudu  
*Tlakové poruchy při podzvukovém proudění – Tlakové poruchy při nadzvukovém proudění – Hugoniotův teorém – Rázové vlny*
- 3.8 ..... Kolmá (přímá) rázová vlna
- 3.9 ..... Šikmá rázová vlna
- 3.10 ..... Nedosažitelné kompresní vlny
- 3.12 .....  $\lambda$ -rázová vlna
- 3.13 ..... Expanzní vlny
- 3.14 ..... Vliv vysokých rychlostí na aerodynamiku profilu  
*Podzvukové a transonické proudění – Zvukové a nadzvukové proudění – Glauert-Prandtlovo pravidlo – Profily vysokých rychlostí*
- 3.18 ..... Aerodynamika profilových mříží ve stlačitelném prostředí
- 3.19 ..... Úloha 1: Výpočet ztráty v kolmé rázové vlně  
Úloha 2: Výpočet parametrů šikmé rázové vlny
- 3.20 ..... Odkazy
- 3.21 ..... Přílohy

**Autor:** ŠKORPÍK, Jiří, ORCID: 0000-0002-3034-1696

**Datum vydání:** Leden 2006, Únor 2023 (2. vydání)

**Název:** Machovo číslo a efekty při proudění vysokými rychlostmi

**Název on-line zdroje:** Transformační technologie (transformacni-technolgie.cz; turbomachinery.education; fluid-dynamics.education; stirling-engine.education)

**ISSN:** 1804-8293

Copyright©Jiří Škorpík, 2006-2023  
Všechna práva vyhrazena.

---

### Základní pojmy v proudění vysokými rychlostmi

Machovo číslo  
Rychlost zvuku  
Stlačitelnost

Machovo číslo je definováno jako poměr rychlosti proudu ku rychlosti šíření zvuku v tekutině (Rovnice 1). Jestliže Machovo číslo dosáhne takové velikosti, při které už pro danou aplikaci nelze uvažovat tekutinu za nestlačitelnou, pak takovou rychlost označuje v aerodynamice za vysokou. Stlačitelnost totiž způsobuje efekty v proudění, které se při proudění nestlačitelných tekutin nebo nízkých Machových číslech nevyskytují. Právě o obecných projevech vlastností stlačitelných tekutin při proudění pojednává tento článek.

$$M = \frac{V}{a}$$

$$a = \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

#### 1: Definice Machova čísla a rychlosti zvuku

$a$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] rychlost šíření zvuku ve vyšetřovaném kontinuu;  $M$  [Mach] Machovo číslo;  $p$  [Pa] tlak;  $r$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ] individuální plynová konstanta;  $T$  [K] absolutní teplota plynu (statická teplota);  $V$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] rychlost tělesa nebo proudění;  $\rho$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ] hustota;  $\kappa$  [1] poměr tepelných kapacit. Odvození rovnice pro rychlost zvuku je v Příloze 3.

Podzvukové proudění  
Transonické proudění  
Zvukové proudění  
Nadzvukové proudění

Jestliže je v okolí vyšetřovaného bodu tekutiny Machovo číslo menší než jedna ( $M < 1$ ), pak mluvíme o podzvukovém (subsonických) proudění. Jestliže se v okolí vyšetřovaného bodu tekutiny pohybuje hodnota Machova čísla kolem 1, konkrétně v rozmezí  $0,8 < M < 1,3$ , pak mluvíme o transonickém proudění – speciálně při velikosti Machova čísla právě 1 ( $M = 1$ ) mluvíme o zvukovém (sonické) proudění. Jestliže se v celém okolí vyšetřovaného bodu tekutiny pohybuje hodnota Machova čísla nad hodnotu 1 ( $M > 1$ ), pak mluvíme o nadzvukovém (supsonickém) proudění.

Kritické Machovo číslo

Někdy se setkáme s pojmem kritické Machovo číslo, toto číslo je vztaženo k nějakému jasně definovanému bodu v rámci vyšetřovaného objemu tekutiny, a jedná se o takovou velikost Machova čísla, při které se někde v daném objemu dosáhne zvukové nebo nadzvukové rychlosti (například v důsledku obtékání nějakých těles uvnitř).

## Dopady konečné velikosti rychlosti zvuku na kontinuitu proudu

Zvuk je tlaková porucha šířící se stlačitelným prostředím rychlostí zvuku  $a$ . To znamená, že při nadzvukovém proudění je nemožné, aby se změny tlaku a dalších stavových veličin nějak projevíly proti směru proudění, z toho důvodu sledujeme zásadní rozdíly mezi šířením tlakové poruchy v podzvukovém, zvukovém nebo nadzvukovém proudu v kanálech nebo při obtékání těles. Matematicky lze popsat tyto rozdíly pomocí Hugoniotova teorému pomocí něhož lze zdůvodnit i vznik rázových vln jako skokový přechod mezi podzvukovým a nadzvukovým prouděním.

Tlakové poruchy při podzvukovém proudění  
Profil

Při podzvukovém i nadzvukovém proudění je zvuk neboli tlaková porucha zároveň informace o tlaku v okolí zdroje této poruchy pomocí, které se stlačitelné prostředí přizpůsobuje zdroji tlakové poruchy, například na Obrázku 2 díky šíření tlakové poruchy, která je rychlejší než nakreslený profil se vzduch rozestupuje (viz nakreslené proudnice) už před profilem<sup>2</sup>; tlaková porucha šířící se od otvoru v tlakové nádobě směrem dovnitř nádoby, která způsobí, že plyn uvnitř nádoby začne proudit směrem k otvoru, kde je nižší tlak apod. Rychlost zvuku lze, z tohoto pohledu, také chápat jako rychlost šíření informace v daném prostředí.

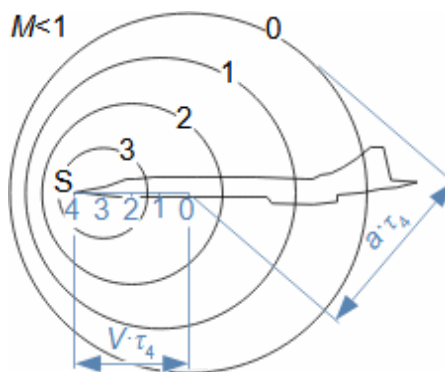


2: Charakter podzvukového proudění

S-zdroj tlakové poruchy (source). Nakreslený profil je obtékán podzvukovou rychlostí.

Zvuková vlna  
Intenzita zvuku  
Gradient intenzity zvuku

Tlaková porucha se v homogenním prostředí šíří v kulových plochách směrem od zdroje S, tj. všemi směry stejnou rychlostí. Rozdíl tlaku na rozhraní neporušeného prostředí a zvukové vlny se zmenšuje s rostoucím poloměrem zvukové vlny (klesá její energetická hustota neboli intenzita zvuku), tím také klesá vliv zvukové vlny na okolní prostředí. Při pohybu zdroje tlakové poruchy se rychlost šíření zvukových vln nemění pouze ve směru pohybu zdroje tlakové poruchy roste gradient intenzity zvuku a naopak, viz Obrázek 3.



3: Šíření zvukových vln při pohybu zdroje tlakové poruchy

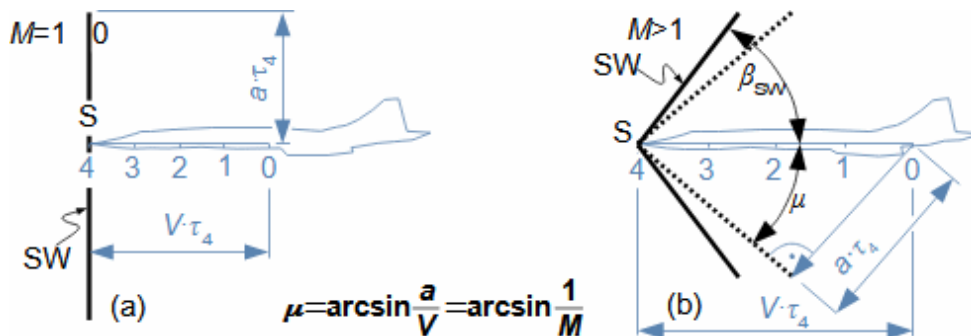
$\tau$  [s] čas. Kružnice 0, 1, 2, 3 představují hranici zvukových vln v prostředí v čase  $\tau=0\dots3$ . V čase 0 je zdroj právě na souřadnici 0 v čase 1 na souřadnici 1 atd. Tj. v bodě 0 vyvolá zdroj tlakovou poruchu, která se šíří rychlostí zvuku v kulové ploše, poté co urazí zdroj vzdálenost 0-R bude mít poloměr zvukové vlny označený na obrázku symbolem 0. Stejný postup platí i pro tlakovou poruchu vyvolanou zdrojem v bodě 1 atd.

Tlakové poruchy při nadzvukovém proudění  
Rázové vlny

Pokud rychlost zdroje tlakové poruchy ve stlačitelném prostředí je blízká rychlosti zvuku nebo je dokonce vyšší, potom dochází k efektům narušující spjitost stlačitelného prostředí (skokové změny stavových veličin) a místo šíření tlakové poruchy formou zvukových vln se šíří formou tzv. rázových vln.

Úhel rázové vlny  
Machův úhel

V případě, že se zdroj tlakové poruchy pohybuje rychlostí zvuku nebo vyšší ( $M \geq 1$ ) je čelo tlakových poruch neustále v místě zdroje. To způsobí, že proudnice se před obtékaným tělesem nerozestupují a toto těleso je nuceno svým objemem okolní plyn vytěsnit prudkou kompresí – energie ke kompresi plynu v rázové vlně je brána z pohybu tělesa. Takto zkomprimovaný plyn postupně expanduje směrem od tělesa. Hranici zkomprimovaného plynu má tvar kužele a nazývá se rázová vlna (Obrázek 4). Sklon rázové vlny  $\beta_{SW}$  je vždy větší než úhel tzv. Machův úhel  $\mu$ , který by vznikl při pohybu nekonečně tenkého tělesa.



4: Vztah mezi úhlem rázové vlny a Machovým úhlem

(a) zdroj se pohybuje zvukovou rychlostí – rázová vlna je mírně skloněna dopředu;  
 (b) zdroj se pohybuje nadzvukovou rychlostí. SW-rázová vlna (shock wave).  
 $\beta_{sw}$  [°] sklon rázové vlny ( $\mu < \beta_{sw}$ );  $\mu$  [°] Machův úhel. Obrázek se nezabývá situací  
 a velikostí rázových vln v čase před  $\tau=0$  a ani situací za rázovou vlnou, tj. za  
 obtékaným tělesem, tento problém je popsán v další části článku.

Zvuková vlna

Rázová vlna

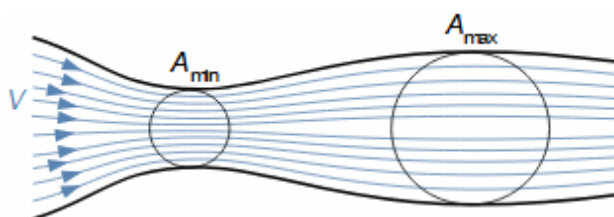
Oproti zvukové vlně je rázová vlna stálá skoková změna stavových veličin (za rázovou vlnou je vyšší tlak, teplota i hustota). Situaci lze přirovnat k expandující kouli stlačeného plynu s tím, že vlivem pohybu tělesa je kompresí další plyn doplňován. Nicméně objem kužele roste s třetí mocninou doby pohybu a množství komprimovaného plynu je lineární (při konstantní rychlosti), takže se vzdáleností od špičky kuželu rázové vlny klesá intenzita rázové vlny.

Zatím bylo znázorněno šíření zvukových vln nebo vznik rázových vln při pohybu tělesa, ale stejného efektu je dosaženo i v opačném případě, kdy těleso je v klidu a je plynem obtékáno či kombinací.

Hugoniotův teorém

Pierre Henri Hugoniot

Rovnici, která predikuje vznik rázových vln při stlačitelném proudění, respektive chování podzvukového a nadzvukového proudění publikoval v roce 1886 francouzský vynálezce, matematik a fyzik Pierre Henri Hugoniot (1851-1887), když se snažil popsat proudění v ústí dělových hlavních, viz [Rovnice 5](#).



$$\frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} (1 - M^2) = 0$$

5: Hugoniotův teorém

$A$  [m] průtočný průřez. Tato rovnice se označuje jako Hugoniotův teorém nebo jako charakteristická rovnice proudění stlačitelné látky. Proudová trubice může být vytvořena pevnými stěnami nebo ostrou hranicí mezi dvěma prostředími s velmi odlišným stavem či vlastnostmi (kapalina versus plyn; řídký plyn versus rázová vlna na okraji apod.). Odvození Hugoniotova teorému je provedeno v [Příloze 4](#).

Interpretace

Hugoniotova teorému

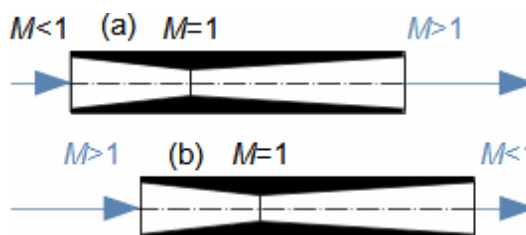
Podle Hugoniotova teorému bude při podzvukové rychlosti na vstupu do zužující se trubice ( $M < 1$ ) docházet k nárůstu rychlosti a naopak, takže lze stanovit i místo v trubici, kde může proudění dosáhnout právě rychlosti zvuku ( $M = 1$ ), musí to být v místě lokálního extrému  $dA/A = 0$  – zbývá určit zda se jedná o minimální nebo o maximální průtočný průřez trubice.

Definice kritické rychlosti

Jestliže ke snižování rychlosti nadzvukového proudu dochází pouze ve zužujícím se kanále, pak rychlosti zvuku lze dosáhnout pouze v nejužším místě kanálu. Pokud se tak stane, tak říkáme, že proudění dosáhlo v kanále kritické rychlosti  $V^*$ .

Nadzvuková tryska  
Nadzvukový difuzor

Chování nadzvukového proudění je tedy přesně opačné než proudění podzvukového, díky tomu dva tvarově totožné kanály na Obrázku 6 fungují zcela odlišně při podzvukovém a nadzvukovém proudění na vstupu. Zobrazený kanál se chová jako nadzvuková tryska<sup>4</sup>, jestliže do kanálu vstupuje podzvukové proudění (Obrázek 6a), které zvyšuje svou rychlost až na  $M=1$  v nejužším průřezu, za tímto průřezem se rychlost dále zvyšuje až na vysoce nadzvukovou výstupní rychlost. Naopak zobrazený kanál se chová jako nadzvukový difuzor<sup>5</sup>, jestliže do kanálu vstupuje nadzvukové proudění, které snižuje svou rychlost na  $M=1$  v nejužším průřezu, za kterým se rychlost dále snižuje až na nízkou podzvukovou rychlost, tím se transformuje kinetická energie nadzvukového proudu na tlakovou energii.



**6:** Příklady vlivu vstupní rychlosti na funkci kanálu proměnlivého průřezu  
(a) Nadzvuková tryska, běžně nazývána jako Lavalova tryska<sup>4</sup>; (b) nadzvukový difuzor.

Rázové vlny

Stroje, ve kterých může docházet k nadzvukovým rychlostem lze reálně konstruovat jen pro konkrétní podmínky (lze dokázat, že poměr výstupního průtočného průřezu ku minimálnímu průřezu musí být pro rozdílná Machova čísla také rozdílná), při změně podmínek by bylo nutné měnit geometrii stroje, aby splňoval požadavky na přechod proudění z nadzvukového do podzvukového. To často není možné splnit a přechod se uskuteční v rozšiřující se části proudové trubice skokem, tj. skokovou změnou stavových veličin tedy rázovou vlnou, jen tak lze splnit podmínky Hugoniotova teorému (plynulý přechod není v takovém kanále možný). Přičemž existuje několik základních druhů rázových vln podle podmínek, za jakých vznikly, viz následující kapitoly.

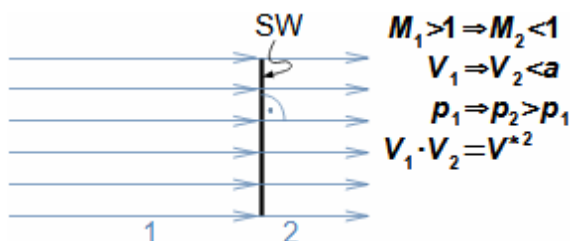
Expanzní vlna

Přechod z podzvukového do nadzvukového proudění není doprovázen rázovými změnami, ale vzniká při něm tzv. expanzní vlna, viz níže.

### Kolmá (přímá) rázová vlna

Rovnice kolmé rázové vlny

V kolmé rázové vlně se téměř skokově mění (její tloušťka je cca  $10^{-7}$  m [Hloušek, 1992]) stavové veličiny plynu, tak jak je uvedeno na Obrázku 7. Po průchodu kolmou rázovou vlnou zůstává směr proudění stejný, ale mění se rychlost a hybnost proudu – za kolmou rázovou vlnou je vždy rychlost nižší, než je rychlost zvuku. Kolmé rázové vlny vznikají v kanálech a kolem osamocených těles při zvukové rychlosti proudu.



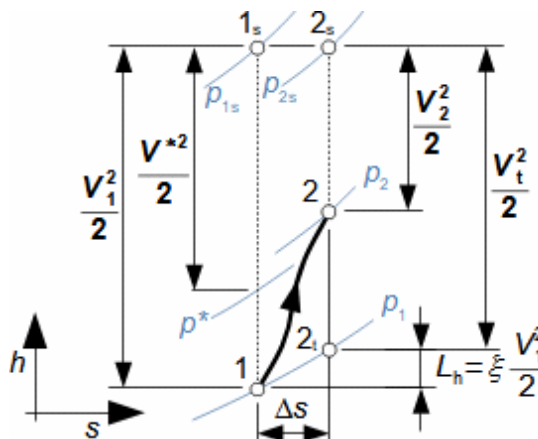
7: Průchod plynu kolmou rázovou vlnou

1-stav plynu před rázovou vlnou; 2-stav plynu za rázovou vlnou.  $p$  [Pa] tlak;  $V^*$  [m·s<sup>-1</sup>] kritická rychlost proudění. Odvození rovnic pro kolmou rázovou vlnu je provedeno například v [Macur, 2010, s. 372].

Ludwig Prandtl

Ztráty v rázové vlně

Energetickou bilanci kolmé rázové vlny s uspokojivým výsledkem poprvé stanovil německý fyzik Ludwig Prandtl (1875-1953) zavedením předpokladu, že při skokové změně stavových veličin v rázové vlně dochází ke ztrátám, což se do té doby nepředpokládalo. Znamená to, že za kolmou rázovou vlnou má plyn vyšší entropii než před ní, což je dobře patrné z  $h$ - $s$  diagramu rázové vlny na Obrázku 8.



8: Změna stavu plynu při průchodu kolmou rázovou vlnou



$h$  [ $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ ] entalpie plynu;  $s$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ] entropie plynu;  $L_n$  [ $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ ] ztráta v rázové vlně;  $p^*$  [Pa] kritický tlak (tlak, při kterém proudění při expanzi z bodu 1s dosáhne rychlosti zvuku);  $V_t$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ] teoretická rychlost plynu při izoentropické expanzi z tlaku  $p_{2s}$  do tlaku  $p_1$ ;  $\zeta$  [1] poměrná ztráta rázem. Index  $s$  označuje celkový stav.

Rankine-Hugoniotovy rovnice

Ztráta v rázové vlně nezávisí přímo na geometrii obtékaného tělesa, ale pouze na vlastnostech plynu a jeho rychlosti, což je patrné z Rankine-Hugoniotových rovnic pro stav plynu před a za vlnou, viz Rovnice 9 a také z výpočtu Úlohy 1.

$$M_2^2 = \frac{\frac{\kappa-1}{2} M_1^2 + 1}{\kappa M_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

**9:** Rovnice stavu plynu před a za kolmou rázovou vlnou

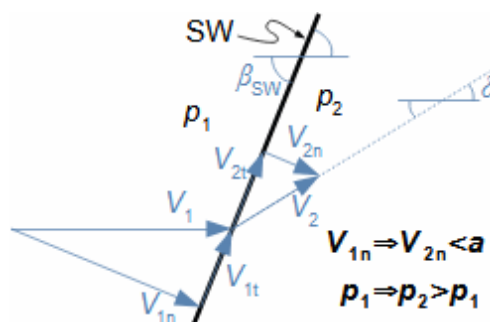
Rovnice jsou odvozeny pro stabilní kolmou rázovou vlnu a ideální plyn. Odvození rovnic je provedeno v Příloze 5.

### Šikmá rázová vlna

Stavy v okolí šikmé rázové vlny

Odklon proudů

Při průchodu proudění šikmou rázovou vlnou se jeho rychlost sníží (může být i na podzvukovou) a navíc dojde ke změně směru proudění o úhel  $\delta$ , viz Obrázek 10. Přičemž pro normálové složky rychlosti šikmé rázové vlny  $V_{1n}$ ,  $V_{2n}$  platí stejné vlastnosti jako pro proudění procházející kolmou rázovou vlnou, viz Úloha 2. Lze také dokázat rovnost tečných složek rychlosti  $V_{1t} = V_{2t}$  [Kadrnožka, 2004, s. 126-127].



**10:** Průchod stlačitelného prostředí šikmou rázovou vlnou

$\delta$  [°] odklon proudění za rázovou vlnou od původního směru. Index  $n$  označuje normálové složky rychlosti, Index  $t$  označuje tečné složky rychlosti.

Úhel rázové vlny

Ztráty v rázové vlně

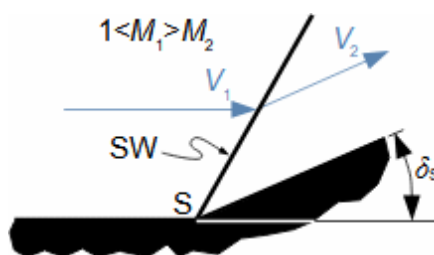
Machův úhel

Zvuková vlna

Jestliže je úhel  $\beta_{SW}$  stejný jako Machův úhel  $\mu$ , pak musí platit  $V_{1n} = a_1$  a jedná se pouze o zvukovou vlnu, což plyne z definice Machova úhlu. Dále lze dokázat, že k největší energetické ztrátě (nárůstu entropie) dochází při  $\beta_{SW} = 90^\circ$  – to znamená, že ztráty v šikmé rázové vlně jsou menší než v kolmé pro stejný tlakový poměr tlaků před a za vlnou.

Vznik šikmé rázové vlny

Šikmá rázová vlna vzniká například na hranách profilů pohybujících se nadzvukovou rychlostí, nebo pokud jsou obtékány nadzvukovým proudem, viz níže. Šikmou rázovou vlnu může vytvořit i nerovnost na obtékané ploše (výrobní nerovnost, kapička nestlačitelné tekutiny v nadzvukovém proudu atd.) či rozhraní mezi nadzvukovým proudem a okolním prostředím, typickým příkladem je nadzvukový výtok plynu z Lavalovy trysky. Šikmá rázová vlna vzniká také tam, kde se náhle zmenší průtočný průřez nadzvukovému proudění, jak je znázorněno na Obrázku 11. Podobným způsobem může vzniknout šikmá rázová vlna i při šikmém střetu dvou nadzvukových proudů, jak naznačuje Obrázek 19. Jestliže je úhel plochy  $\delta_s$  větší než odpovídá úhlu rázové vlny  $\delta$  podle Obrázku 10, potom se rázová vlna posune ještě před začátek klínu [Dejč, 1967, s. 150]. Zajímavá situace nastane v případě, jestliže náhle zvedající se plocha je nahrazena obloukem, viz následující kapitola.



11: Vznik šikmé rázové vlny u paty náhle se zvedající obtékané plochy  
 $\delta_s$  [°] úhel obtékané plochy.

Rázová vlna v trysce raketového motoru  
 $N_2O_4$

Změny směru proudu při průchodu rázovou vlnou se využívá k záměrné změně směru nadzvukového proudění, například k řízení vektoru tahu raketových motorů<sup>4</sup> na tuhá paliva. V takovém případě je rázová vlna vytvořena pomocí kapičky nestlačitelné kapaliny (například  $N_2O_4$ ) vstříknuté na vnitřní stranu trysky. Rázová vlna se iniciuje na této hranici kapičky.

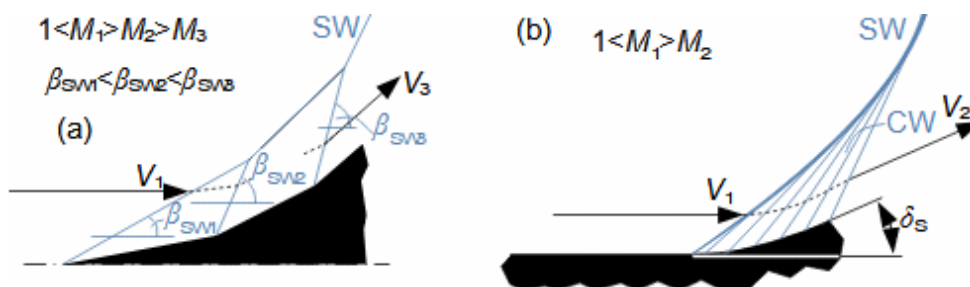
### Nedosažitelné kompresní vlny

Kompresní vlna

Kompresní vlna je útvar ekvivalentní rázové vlně. Jedná se o plynulou izentropickou kompresi nadzvukového proudění ve zužujícím se prostoru tak, jak popisuje Hugoniotův teorém. V praxi ale tento děj není uskutečnitelný, protože snižování průtočného průřezu by muselo být nekonečně malé [Dejč, 1967, s. 405].

Kumulace rázových vln

Při reálné nadzvukové kompresi namísto kompresních vln vzniká kumulace šikmých rázových vln (Obrázek 12). Pokud totiž za šikmou rázovou vlnou vznikne další šikmá rázová vlna, pak tato vlna bude mít větší úhel, takže tyto dvě vlny se v určité vzdálenosti od místa vzniku střetnou. V místě střetu se sečtou jejich účinky, tj. hybnost a tlak, tím vznikne nová šikmá rázová vlna s úhlem odpovídající tomuto součtu. Při postupné kumulaci více rázových vln se jejich účinek sčítá dále od tělesa a výsledná vlna má i menší úhel  $\beta_{SW}$  než první vlna odpovídající určité rychlosti proudění.



12: Kumulace šikmých rázových vln

(a) stupňující se plocha; (b) vznik kompresních vln u pozvolna se zvedající plochy [Nožička, 2000]. CW-soustava kompresních vln.

Zředění rázové vlny

V letectví se provádí experimenty se snižování zvukových efektů způsobené rázovými vlnami při nadzvukových letech založené na rozdělení rázové vlny na několik dílčích vln (zředění rázové vlny, viz Obrázek 13). Tímto způsobem se sníží nejen ztráty v rázových vlnách, ale především se tím dosáhne co největšího úhlu výsledné rázové vlny (poté co se setkají všechny rázové vlny od trupu letounu). Čím je totiž úhel rázové vlny větší (nejlépe  $90^\circ$ ), tím je zvukový efekt od vlny menší [Hošek, 1962, s. 60] – což by umožňovalo dopravním letounům alespoň omezeně let vysokou rychlostí i nad obydlými oblastmi.



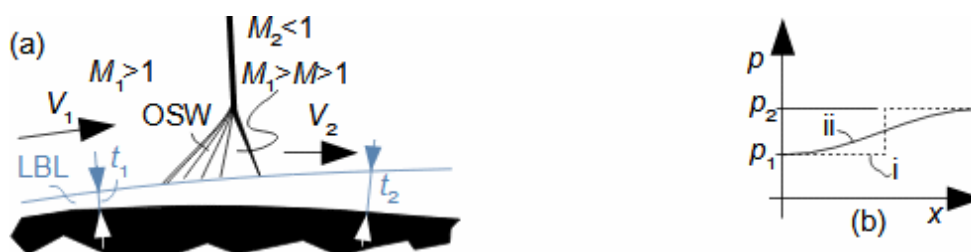
13: Projekt Quiet Spike

Projekt se úspěšně zabýval možností snížit intenzitu zvukových efektů pomocí odstupňovaně prodloužené přídě letounu. Zde testování teleskopické přídě letounu F-15B [Creech, 2009].

$\lambda$ -rázová vlna

Vznik  $\lambda$ -rázové vlny  
 Transonické proudění  
 Mezní vrstva  
 Laminární proudění  
 Turbulentní proudění

$\lambda$ -rázová vlna (Obrázek 14) vzniká při obtékání těles transonickou rychlostí s laminární<sup>7</sup> mezní vrstvou<sup>7</sup>. V mezní vrstvě se tlak zvyšuje postupně na úkor rychlosti, protože v mezní vrstvě je podzvukové proudění. Tím se zvětšuje její tloušťka a vzniká klín od kterého dochází ke kumulaci šikmých rázových vln, což je dobře patrné na zjednodušeném schématu  $\lambda$ -rázové vlny na Obrázku 15. Výsledná rázová vlna je často mírně skloněna dopředu [Hošek, 1949]. V případě turbulentního proudění<sup>7</sup> je klín velmi malý (turbulentní proudění není tak citlivé na změnu tlaku) a na hranici mezní vrstvy vzniká přímo kolmá rázová vlna.

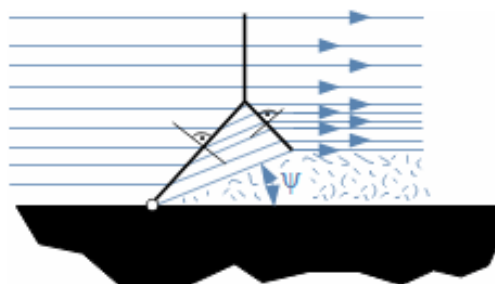


14: Zjednodušený popis  $\lambda$ -rázové vlny

(a)-celkový náhled na  $\lambda$ -rázovou vlnu; (b) průběh změny tlaku v  $\lambda$ -rázové vlně a v mezní vrstvě. LBL-laminární mezní vrstva (laminar boundary layer); i-průběh tlaku v jádru proudu těsně před a za rázovou vlnou; ii-průběh tlaku v laminární mezní vrstvě; OSW-druhotné šikmé rázové vlny vznikající v důsledku zvětšení tloušťky mezní vrstvy (oblique shock waves).  $t$  [m] tloušťka mezní vrstvy;  $x$  [m] vzdálenost.

Održení mezní vrstvy

Obecně je ztráta v  $\lambda$ -rázové vlně menší než u přímé rázové vlny a větší než u šikmé [Hošek, 1949, s. 201], proto rychlost na proudnicích procházejících šikmými rázovými vlnami (ta část  $\lambda$ -vlny blíže k profilu), budou mít jinou rychlost, než na proudnicích procházejících přes přímou rázovou vlnu. Navíc ke ztrátě rázovou vlnou je nutné přičíst ztrátu odtržením mezní vrstvy<sup>2</sup> od profilu, která vzniká za  $\lambda$ -rázovou vlnou [Hošek, 1949, s. 198], [Kadrnožka, 2004, s. 132], viz Obrázek 14.



15: Princip odtržení proudu od profilu za  $\lambda$ -rázovou vlnou

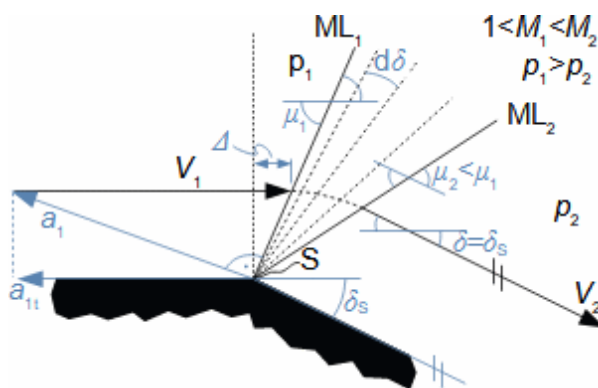
### Expanzní vlny

Vznik expanzních vln

Pokud se nadzvukové proudění dostane do prostoru se zvyšujícím se průtočným průřezem musí expandovat do vyšší rychlosti, jak predikuje Hugoniotův teorém. Taková nadzvuková expanze probíhá formou expanzních vln.

Odklon proudu

Zvyšující se průtočný průřez vytvářejí i tupé úhly na tělesech, například odtoková hrana projektilů, místa počátku zužování trupu letounů apod., viz Obrázek 16, na kterém je typická charakteristika obtékání tupého úhlu nadzvukovou rychlostí. Při obtékání tupých úhlů nadzvukovou rychlostí musí docházet k expanzi plynu z tlaku  $p_1$  na tlak  $p_2$  a ke zvýšení rychlosti proudu z  $V_1$  na  $V_2$ , zároveň dojde i k vychýlení směru proudícího plynu o úhel  $\delta$  od původního směru. V expanzní vlně probíhá pozvolná změna stavových veličin s malými ztrátami.



**16:** Obtékání tupého úhlu nadzvukovou rychlostí  
ML-Machova čára (Mach line);  $\Delta$  [m] délkový rozdíl.

Machova čára

Prandtl-Meyerovy  
funkce pro odklon  
proudu

Vznik expanzní vlny na Obrázku 16 iniciuje tlaková porucha na hraně S, která se šíří proti proudění rychlostí  $a_{1t}$ . První proudnice zareaguje okamžitě a začne expandovat do tlaku nižšího změnou směru proudění ve směru poklesu tlaku. Vzdálenější proudnice expanduje až za hranou S, protože než k ní dorazí tlaková porucha urazí vzdálenost  $\Delta$ . Hranice  $ML_1$ , na které se začne měnit směr proudění a plyn expandovat je tzv. Machova čára jejíž sklon je roven Machovu úhlu  $\mu_1$ . Na první Machově čáře započne tedy expanze plynu. Při expanzi dochází ke změně Machova čísla a tedy i Machova úhlu. Expanze se ukončí na Machově čáře  $ML_2$ , na které proudící plyn dosáhne tlaku  $p_2$ . První a poslední Machova čára vytváří Machův klín, ve kterém expanze plynu probíhá. Přičemž hodnotu úhlu  $\delta$  lze stanovit z Prandtl-Meyerovy funkce  $v$  [ANON., 2010], viz Rovnice 17.

$$\delta = \nu(M_2) - \nu(M_1)$$

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \arctan \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} (M^2-1)} - \arctan \sqrt{M^2-1}$$

17: Prandtl-Meyerovy funkce

 $\nu(M)$  [°] Prandtl-Meyerova funkceMaximální odklon  
proudu

Maximálního úhlu odklonu proudu při průchodu v expanzní vlnou  $\delta_{\max}$  a maximální rychlosti  $V_{2\max}$  dosáhne proudění při expanzi do vakua  $p_2=0$ . Při expanzi do vakua bude  $M_2=\infty$ . Jestliže úhel sklonu hrany bude větší než  $\delta_{\max}$  vznikne za hranou S mezi proudem a obtékanou plochou vakuum.

Šikmo seříznutá tryska

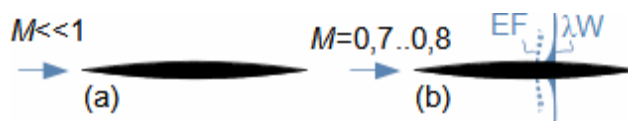
Expanzní vlny mohou také vznikat při nadzvukových rychlostech ve výtoku z kanálů, například v šikmo seříznutých tryskách<sup>4</sup> a při nadzvukovém výtoku z lopatkového kanálu.

### Vliv vysokých rychlostí na aerodynamiku profilu

Rozdíl mezi podzvukovým a nadzvukovým prouděním kolem profilů je jak v rozložení rychlostí, tak ve velikosti aerodynamických veličin popisujících silové účinky proudění na křídlo, i když je lze přepočítat pomocí Glauertova-Prandtlova pravidla. Odtud plynou i rozdíly ve tvarech podzvukových a nadzvukových profilů.

Podzvukové a  
transonické proudění  
Expanzní vlny  
 $\lambda$ -rázová vlna

Rychlost v okolí profilu se nejprve zvyšuje až po nejširší část profilu, pak se se začne naopak snižovat a při podzvukovém proudění žádné efekty nesledujeme, viz Obrázek 18(a). Při kritickém Machovu čísle, respektive při transonické rychlosti, může rychlost v nějakém místě v okolí profilu dosáhnout i rychlosti zvuku, což způsobí, že za nejširší části profilu se vytvoří expanzní vlny za nimiž je rychlost vyšší než před nimi. Před odtokovou hranou profilu vznikne rázová vlna, protože rychlost na konci profilu musí být opět podzvuková pro zachování kontinuity proudu (spojitý přechod není možný), a protože u krátkých profilů je mezní vrstva laminární, pak tato rázová vlna bude  $\lambda$ -rázová vlna, viz Obrázek 18(b).



18: Obtékání čočkovitého profilu podzvukovým prouděním

(a) podzvukové obtékání profilu; (b) transonické obtékání profilu, [Kneubuehl, 2004, s. 78]. EF-expanzní vlna (expansion fan);  $\lambda W$ - $\lambda$ -rázová vlna.

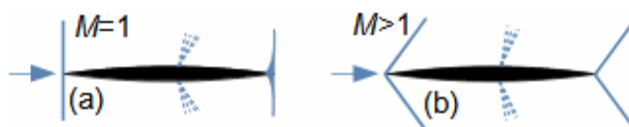


Zvukové a nadzvukové proudění

Kolmá rázová vlna

Šikmá rázová vlna

$\lambda$ -rázová vlna se posouvá s roustoucí rychlostí směrem k odtokové hraně profilu, takže při dosažení rychlosti zvuku se dostane až k odtokové hraně a na nátokové hraně se začne formovat kolmá rázová vlna (Obrázek 19(a)). Při nadzvukové rychlosti se přetvoří čelní kolmá rázová vlna na šikmou a to samé se stane na odtokové hraně, kde se vytvoří dvě šikmé rázové vlny srážkou dvou nadzvukových proudů od sací a přetlakové strany profilu, viz Obrázek 19(b).

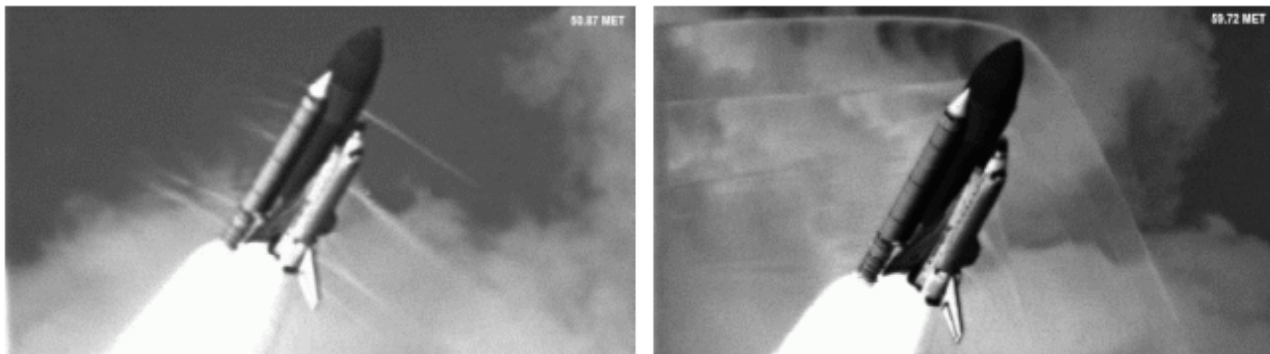


19: Obtékání čožkovitého profilu zvukovým a nadzvukovým prouděním

(a) zvukové obtékání profilu; (b) nadzvukové obtékání profilu [Kneubuehl, 2004, s. 78].

Start raketoplánu

Příkladem přechodu z transonické do nadzvukové rychlosti je start raketoplánu Discovery (STS-114, 2005) na Obrázku 20. Vlevo je snímek v čase 50,87 s po startu (1,2 Mach, aerodynamický odpor dosahuje maxima), vpravo je snímek v čase 59,72 s (1,5 Mach aerodynamický odpor klesá).



20: Charakteristika obtékání raketoplánu stlačitelným prouděním během jeho startu  
Zdroj fotografií [O'Farrell and Rieckhoff, 2011].

Glauert-Prandtlovo pravidlo

Součinitel vztlaku

Tlakový součinitel

Součinitel odporu

Laminární profil

Pro přepočítání aerodynamických veličin získaných z měření při nestlačitelném proudění na situaci stlačitelného proudění lze použít Glauert-Prandtlovo pravidlo, viz Rovnice 21. Tyto rovnice lze použít pouze pro rychlosti proudění nepřekračující kritické Machovo číslo ani kritické Reynoldsovo číslo – profily, u kterých proudění nepřekračuje kritické Reynoldsovo číslo se nazývají laminárními profily [Abbott and Doenhoff, 1959, s. 256 a s. 283-287], [Hošek, 1949, s. 52].

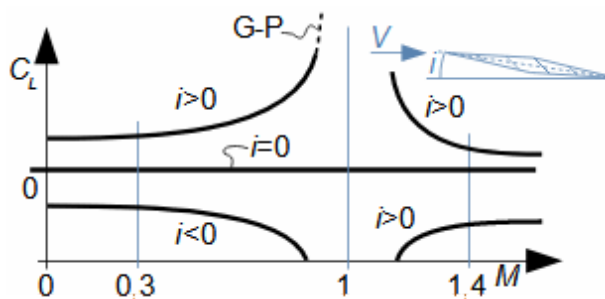
$$(a) \frac{C_{P,c}}{C_{P,i}} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \quad (b) \frac{C_{L,c}}{C_{L,i}} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \quad (c) C_{D,c} \approx C_{D,i}$$

21: Glauert-Prandtlovo pravidlo

(a) Glauert-Prandtlovo pravidlo pro tlakový součinitel profilu; (b) Glauert-Prandtlovo pravidlo pro součinitel vztlaku<sup>2</sup>; (c) vliv zvyšování rychlosti na součinitel odporu<sup>2</sup>.  $C_D$  [1] součinitel odporu profilu;  $C_L$  [1] součinitel vztlaku profilu;  $M$  [Mach] Machovo číslo (před profilem);  $C_p$  [1] tlakový součinitel profilu. Index  $_i$  označuje nestlačitelné proudění (incompressible), index  $_c$  stlačitelné proudění (compressible). Odvození je uvedeno v [Hošek, 1949, s. 49].

Součinitel vztlaku

Glauert-Prandtlovo pravidlo se používá přibližně od 0,3 Mach, přičemž v blízkosti rychlosti zvuku už jeho přesnost klesá, protože výsledky výpočtu jdou do nekonečna, viz Obrázek 22, na rozdíl od naměřených hodnot (viz měření v [Hošek, 1949, s. 345]).



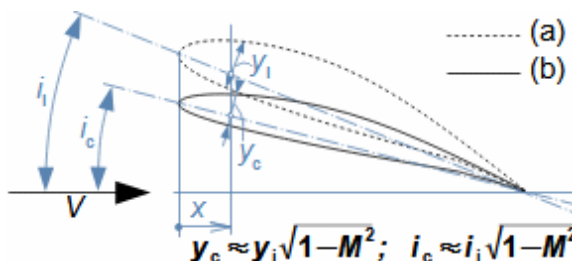
22: Změny součinitele vztlaku u kosočtvercového profilu  $i$  [°] nátokový úhel.

Součinitel odporu

Změna součinitele odporu  $C_D$  nastává až při transonických rychlostech, kdy vznikají  $\lambda$ -rázové vlny. Po opuštění transonické oblasti při vzniku šikmých rázových vln součinitel odporu opět klesá, viz Obrázek 19.

Nátokový úhel

Glauert-Prandtlovo pravidlo lze použít i obráceně – lze určit jak by se měl změnit profil a nátokový úhel<sup>2</sup> profilu při vysokých rychlostech, aby měl stejné aerodynamické vlastnosti jako při nízkých rychlostech, viz Rovnice 23, [Hošek, 1949, s. 57].



23: Praktická aplikace Glauert-Prandtlova pravidla

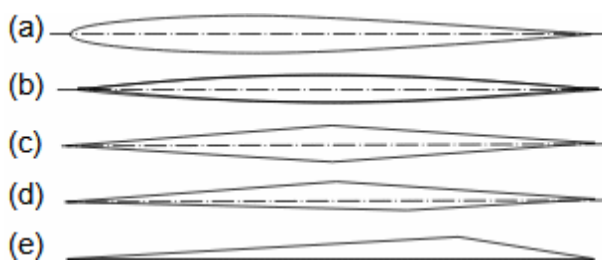
(a) profil obtékáný nestlačitelným prouděním; (b) profil obtékáný stlačitelným prouděním.  $x$  [m] souřadnice profilu ve směru nátokové rychlosti;  $y_{i,c}$  [m] lokání tloušťka profilu obtékáného nestlačitelným, respektive stlačitelným prouděním.



Z výše uvedeného je evidentní, že pro vyšší rychlosti obtékání postačují tenké málo zakřivené profily, čehož si každý všimne u stíhacích nadzvukových letounů, které jsou štíhlejší než podzvukové stroje.

Profily vysokých  
rychlostí  
Aerodynamika letu

U dobře navrženého profilu by měl být předvídatelný vznik efektů spojených s vysokou rychlostí a jejich vliv na aerodynamiku letu. Dobře předvídatelný je v tomto směru kosočtvercový profil. Expanzní vlny vznikají pouze na vrcholcích sací a přetlakové strany a  $\lambda$ -rázové vlny vznikají až u odtokové hrany profilu. Samozřejmě tento profil není vhodný pro nízké podzvukové rychlosti, takže se hledají různé kompromisy tvarů profilů podle toho, pro jaké rychlosti jsou primárně určeny, viz Obrázek 24.



**24:** Typy profilů vhodné pro vysoké rychlosti ve stlačitelném proudě

(a) transonický profil; (b) supersonický (čočkový tvar); (c) supersonický (kosočtvercový tvar); (d) supersonický (lichoběžníkový tvar); (e) hypersonický.

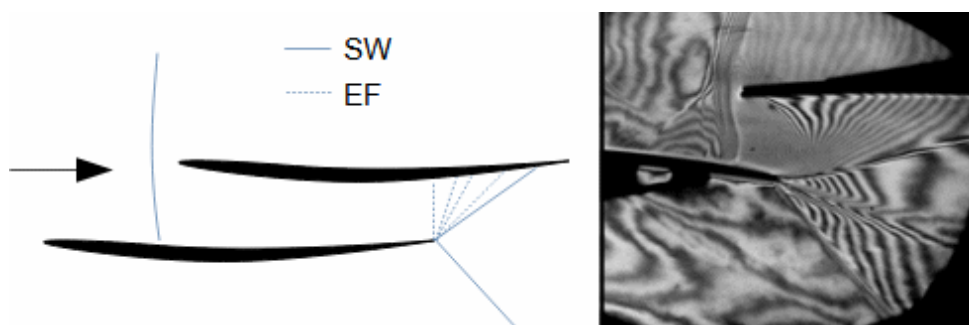
Působíště vztlaku  
Působíště odporu

Vysoké rychlosti způsobují také posun působíště vztlaku, které se posouvá se změnou Machova čísla [Hošek, 1949, s. 46, 240], současně se mění i velikost vztlaku, viz Obrázek 22. Z toho důvodu jsou moderní letouny vybaveny zařízeními pro změnu geometrie křídla či přesunu těžiště, a zejména při rychlostech kolem rychlosti zvuku mění náklon kvůli udržení takových nátokových úhlů, aby vztlak udržely v požadované velikosti – při velmi vysokých podzvukových rychlostech může být dokonce i záporný [Steuer and Haggerty, 1966, Flight, s. 69].

Interferogram  
 Expanzní vlny  
 Odklon proudů  
 Rázové vlny

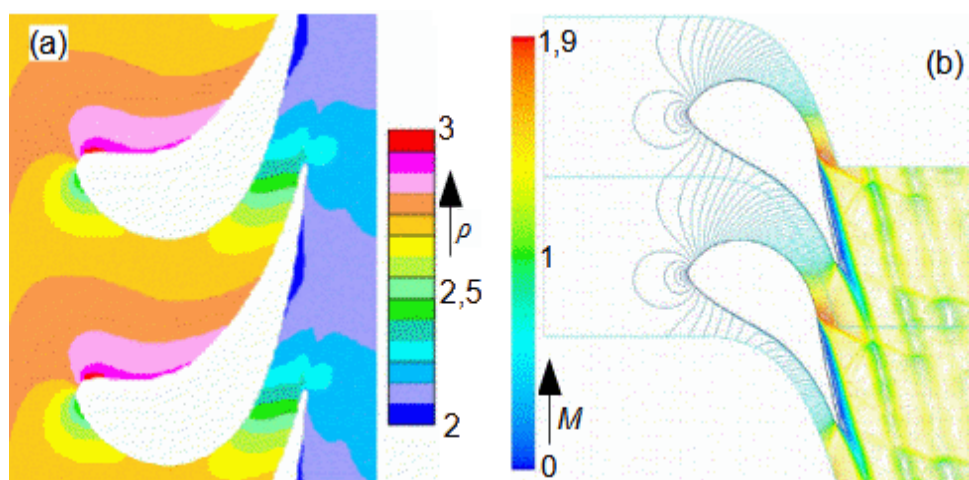
### Aerodynamika profilových mříží ve stlačitelném prostředí

Efekty spojené se stlačitelným prouděním při vysoké rychlosti vznikají i v kanálech profilových mříží. Na Obrázku 25 je interferogram (fotografie zachycující změny hustoty plynu) nadzvukového proudění turbínovou profilovou mříží, přičemž na vstupu je rychlost 1,19 Mach a na výstupu rychlost, která by při izoentropickém proudění odpovídala rychlosti 2,003 Mach. V okolí výstupní části profilové mříže jsou jasně patrné expanzní vlny a vznik rázových vln na odtokové hraně při srážce dvou nadzvukových proudů. Při průchodu těmito vlnami se mění směr proudění, což je typický problém vznikající na výstupu z profilové mříže při nadzvukovém proudění. V tomto případě je již na vstupu nadzvukové proudění, takže na nátokových hranách profilů vznikají šikmé rázové vlny.



25: Supersonické proudění v mříži

vlevo-schéma situace zaznamenané na interferogramu; vpravo-interferogram nadzvukového proudění turbínovou mříží. Pořízeno Machovým-Zehnderovým interferometrem. Snímky poskytla Aerodynamická laboratoř v Novém Kníně při Ústavu termomechaniky AVČR, v.v.i.



26: Příklady numerického modelování stlačitelného proudění v lopatkové mříži (a) pracovní plyn vodní pára  $M_1=0,42$  (před mříží),  $M_2=0,7$  (za mříží), vytvořeno na Energetickém ústavu FSI VUT v Brně; (b) turbínová lopatková mříž, pracovní plyn vzduch [Tajč et al., 2007].  $M$  [Mach];  $\rho$  [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ] hustota.

Analytický výpočet  
 Trysky  
 Difuzory

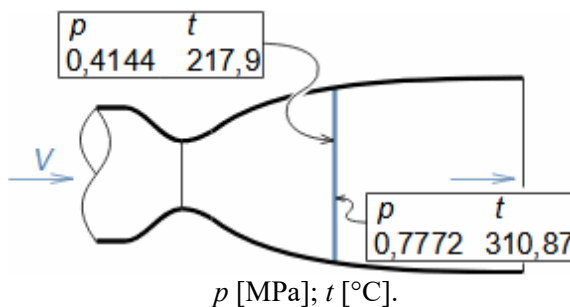
Analytické řešení v uzavřeném tvaru lze nalézt pro stlačitelného proudění v profilové mříži pouze pro případ jednorozměrného stlačitelného proudění v kanále – to je ekvivalentní analytickému návrhu trysek<sup>4</sup> nebo difuzorů<sup>5</sup>. Přesnějších výsledků, které berou v úvahu prostorových charakter proudění, lze dosáhnout numerickým modelováním pomocí výkonného výpočetního hardwaru a příslušného softwaru, viz Obrázek 26.

### Úlohy

Ztráta v rázové vlně  
 Lavalova tryška

#### Úloha 1:

V Lavalově trysece vznikla kolmá rázová vlna. Vypočítejte ztrátu při průchodu plynu touto vlnou. Naměřené tlak a teplota před a za vlnou jsou na přiloženém obrázku. Vypočítaná rychlost před vlnou z průřezu trysky a hmotnostního průtoku je 583,72 m·s<sup>-1</sup>. Tryskou proudí suchý vzduch. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 1.



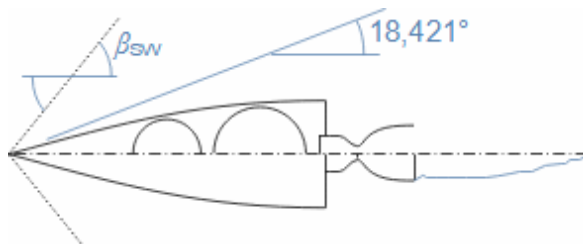
§1	zadáni:	$V_1; t_1; p_1; p_2; t_2$
§2	odečet:	$h_1; h_{2t}$
	výpočet:	$L_h$

Postup řešení Úlohy 1. Popisek symbolů je uveden v Příloze 1.

Úhel rázové vlny

#### Úloha 2:

Jaký úhel rázové vlny vytvoří raketová střela při rychlosti  $M=2,5$  Mach? Jaká bude rychlost, teplota a tlak v proudě za vlnou? Geometrie střely je na obrázku. Ostatní parametry jsou:  $\kappa=1,4$ ,  $t_1=20$  °C,  $p_1=101\ 325,25$  Pa,  $r=287$  J·kg<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 2.



§1 zadání: $\delta_s; M; \kappa; t_1; p_1; r;$ $C_p$	§4 výpočet: $M_{2n}; t_2; V_{2t}$
§2 odhad: $\beta_{sw}$	§5 porovnání: $V_{1t}$ vs. $V_{2t}$ , jestliže se nepřiměřeně liší, pak provést nový odhad $\beta_{sw}$ a opakovat výpočet od §2
§3 výpočet: $V_{1t}; M_{1n}$	§6 Výpočet: $V_2; p_2$

Postup řešení Úlohy 2. Popisek symbolů je uveden v Příloze 2.

### Odkazy

- ŠKORPÍK, Jiří, 2019, Technická termomechanika, *Transformační technologie*, Brno, [on-line], ISSN 1804-8293. <https://www.transformacni-technologie.cz/43.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2023, Technická matematika, *Transformační technologie*, Brno, [online], ISSN 1804-8293. <https://engineering-sciences.education/technicka-matematika.html>.
- ŠKORPÍK, Jiří, 2022, Základní rovnice lopatkových strojů, *Transformační technologie*, Brno, [on-line], ISSN 1804-8293. Dostupné z <https://turbomachinery.education/zakladni-rovnice-lopatkovych-stroju.html>.
- ABBOTT, Ira, DOENHOFF, Albert, 1959, *Theory of wing sections, including a summary of airfoil data*, Dover publications, inc., New York, ISBN-10:0-486-60586-8.
- ANON., 2010, *Expansion fan – Isentropic flow*, National Aeronautics and Space Administration – NASA, Washington, D.C., <http://www.grc.nasa.gov>.
- CREECH, Gray, 2009, *Supersonic Jousting*, National Aeronautics and Space Administration – NASA, Washington, D.C.
- DEJČ, Michail, 1967, *Technická dynamika plynů*, SNTL, Praha.
- HLOUŠEK, Jiří, 1992, *Termomechanika*, Vysoké učení technické v Brně, Brno, ISBN 80-214-0387-X.
- HOŠEK, Josef, 1949, *Aerodynamika vysokých rychlostí*, Naše vojsko, Praha.
- HOŠEK, Josef, 1962, *Dnešní letectví: nové vývojové směry v letectví*, Práce, Praha
- KADRNOŽKA, Jaroslav, 2004, *Tepelné turbíny a turbokompresory*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, ISBN 80-7204-346-3.
- KNEUBUEHL, Beat, 2004, *Balistika střely, přesnost střelby, účinek*, Naše vojsko, Praha, ISBN 80-206-0749-8.
- MACUR, Milan, 2010, *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*, Vutium, Brno, ISBN 978-80-214-3944-3.
- NOŽIČKA, Jiří, 2000, Osudy a proměny trysky Lavalovy, *Bulletin asociace strojních inženýrů*, č. 23, ASI, Praha.
- O'FARRELL, J.M., RIECKHOFF, T.J., 2011, *Direct Visualization of Shock Waves in Supersonic Space Shuttle Flight*, George C. Marshall Space Flight Center, AL 35812 – Technical Memorandum.
- STEVER, Guyford, HAGGERTY James, 1966, *Flight*, Time Inc.
- TAJČ, Ladislav, BEDNÁŘ, Lukáš, POLANSKÝ, Jiří, Šťastný, Miroslav, 2007, Radial Control Stage with Partial Steam Admission, *Proceedings of the 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows*, Lyon.