PROUDĚNÍ PLYNŮ A PAR TRYSKAMI

Jiří Škorpík, skorpik.jiri@email.cz

Co jsou trysky a další využití teorie trysek	4.3
Konvergentní (konfuzorová, zužující se) tryska	4.3
Konvergentně-divergentní tryska (Lavalova tryska)	4.8
Proudění v šikmo seříznuté trysce	4.13
Proudění tryskou se ztrátami	4.14
Tryska jako lopatkový kanál	4.16
Průtok skupinou trysek, stupňů turbín a Stodolovo pravidlo	4.16
Tryska raketového motoru	4.18
Úloha 1: Výpočet průtoku tryskou	4.19
Úloha 2: Výpočet rozměru kuželové trysky	4.19
Úloha 3: Výpočet rozměrů Lavalovy trysky	4.19
Úloha 4: Výpočet polohy rázové vlny v trysce	4.19
Úloha 5: Výpočet rozměrů Lavalovy trysky při prouděním se ztrátami	4.20
Odkazy	4.20
Přílohy	4.21

Autor: ŠKORPÍK, Jiří, ORCID: 0000-0002-3034-1696

Datum vydání: Únor 2006, Červen 2023 (2. vydání)

Název: Proudění plynů a par tryskami

Název on-line zdroje: Transformační technologie (transformacni-technolgie.cz; fluid-dynamics.education; turbomachinery.education; engineering-sciences.education; stirling-engine.education)

ISSN: 1804-8293

Co jsou trysky a další využití teorie trysek

Definice trysky

Dýza

Tryska – jiný frekventovaný název dýza – je kanál s plynulou změnou průtočného průřezu. Proudění tekutiny v trysce je děj, při kterém dochází především k poklesu tlaku a zvýšení kinetické energie tekutiny.

Konvergentní tryska

Kovergentně-divergentní tryska

Hugoniotův teorém

Základními tvary trysek jsou tryska konfuzorová (konvergentní), neboli zužující se, ve které probíhá podzvuková expanze a konvergentně-divergentní neboli Lavalova tryska pro nadzvukovou expanzi a jejíž tvar vychází z Hugoniotova teorému[3.] pro kanál s nadzvukovým proudem.

Teorie trysek

Teorie trysek je dobře propracovaná a má i široké uplatnění v různých typech proudových strojů. Pomocí propracované teorie trysek lze totiž popsat i některé, na první pohled, složité proudění. Navíc pro trysky existuje velké množství naměřených dat.

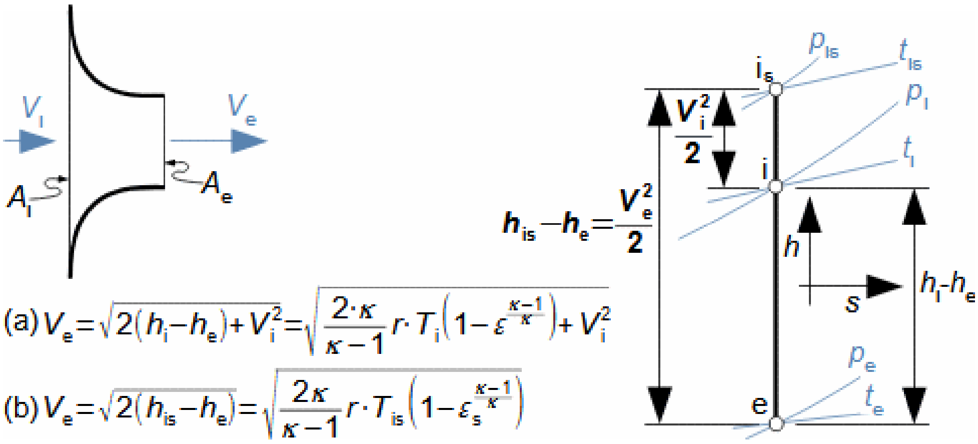
Konvergentní (konfuzorová, zužující se) tryska

Vzhledem k tomu, že expanze v trysce je v technice frekventovaný problém vznikla teorie ideální expanze v trysce již v 19. století [Nožička, 2000]. Tato teorie popisuje změny stavových veličin v trysce, zejména rychlost a hmotnostní průtok. K návrhu tvaru trysky existuje více přístupů, zejména záleží na účelu trysky, technologické náročnosti její výroby a požadované maximální délce.

Rovnice pro výtokovou rychlost

Saint Vénantova-Wantzelova rovnice

Ze změn stavových veličin v trysce zakreslených v *h*-*s* diagramu je patrné, že rychlost plynu na výtoku z trysky závisí na tlaku na vstupu p_i a tlaku na výtoku p_e (protitlak) z trysky. Rovnici 1 pro výtokovou rychlost z trysky lze pak odvodit z rovnice Prvního zákona termodynamiky pro otevřený systém nebo z Bernoulliho rovnice v případě proudění kapaliny. Tato rovnice je odvozena pro dokonalou expanzi ideálního plynu bez vlivu tíhy.

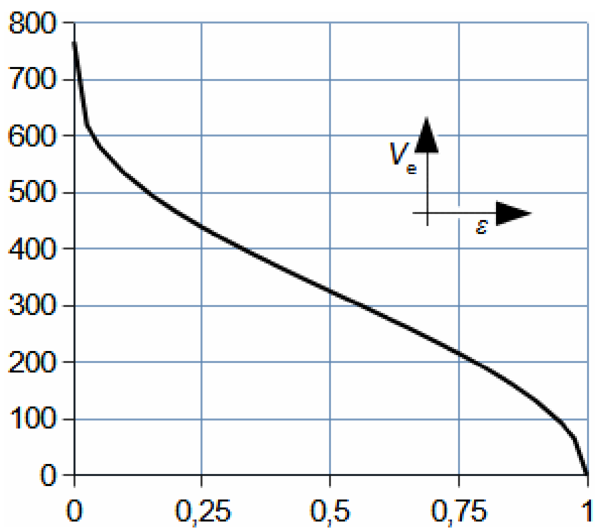


1: Rovnice pro výtokovou rychlost trysky a definice tlakového poměru

(a) výpočet ze statického stavu plynu před tryskou; (b) výpočet z celkového stavu plynu před tryskou. e-stav v ústí trysky; i-stav na vstupu do trysky. A [m^2] průtočný průřez trysky; h [J·kg^{-1}] entalpie; p [Pa] tlak; r [J·kg^{-1}·K^{-1}] individuální plynová konstanta plynu; s [J·kg^{-1}·K^{-1}] entropie; T [K] absolutní teplota plynu; t [°C] teplota; V [m·s^{-1}] rychlost; ε [1] tlakový poměr statických tlaků ($p_e \cdot p^{-1}_i$); ε_s [1] tlakový poměr k celkovému vstupnímu tlaku ($p_e \cdot p^{-1}_{is}$); κ [1] konstanta adiabaty (poměr tepelných kapacit). Index $_s$ označuje celkový stav plynu (stagnation), index $_i$ označuje stav na vstupu do trysky, index $_e$ označuje stav na výstupu z trysky (těsně v ústí trysky). Odvození rovnice je v Příloze 6.

Výtoková rychlost jako funkce protitlaku

Na Obrázku 2 je znázorněn průběh výtokové rychlosti plynu V_e při změně protitlaku p_e, přičemž maximální rychlost plynu bude při výtoku do vakua p_e=0.



2: Výtoková rychlost plynu z trysky v závislosti na tlakovém poměru

p_{at} [Pa] atmosférický tlak. Parametry plynu: κ=1,4, r=287 J·kg^{-1}·K^{-1}, t_i=20 °C, p_i=p$_{at}$, V_i=0. Graf pro ideální plyn.

Hmotnostní tok tryskou

Hmotnostní tok plynu tryskou lze vypočítat z rovnice kontinuity. V případě ideálního plynu lze použít rovnice ideálního plynu pro rychlost a získat tak rovnici pro hmotnostní tok tryskou jako funkce tlakového poměru, viz Rovnice 3.

$$\dot{m}=A_e \cdot V_e \frac{1}{v_e}; \quad \dot{m}=A_e \sqrt{\frac{p_{is}}{v_{is}}} \chi_m$$

$$\chi_m=\sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-1}}\sqrt{\varepsilon_s^{\frac{2}{\kappa}}-\varepsilon_s^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}}$$

3: Rovnice pro hmotnostní tok plynu tryskou

$m^{\bullet}$ [kg·s^{-1}] hmotnostní tok plynu tryskou; v [m^3·kg^{-1}] měrný objem plynu; χ_m [1] průtokový faktor nebo také výtokový součinitel. Odvození rovnice pro výpočet hmotnostního toku tryskou je v Příloze 7.

Průtokový faktor

Průtokový faktor v Rovnici 3, je založen na tom, že pro ideální plyny připadají v úvahu pouze tři hodnoty poměru tepelných kapacit ideálních plynů κ, viz Tabulka 4.

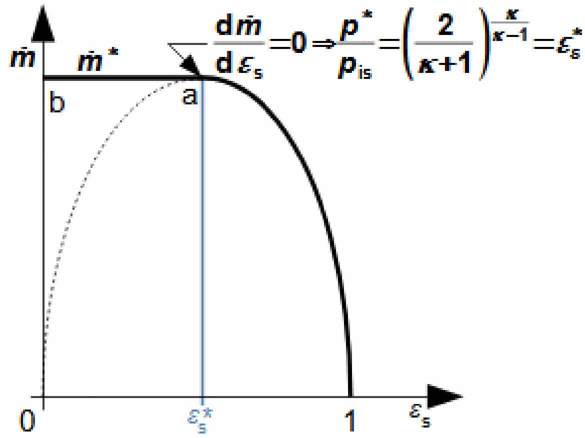
4: Hodnoty průtokového faktoru

ε_s	χ_m κ=1,3333	χ_m κ=1,4	χ_m κ=1,6667	ε_s	χ_m κ=1,3333	χ_m κ=1,4	χ_m κ=1,6667
0,4871	-	-	0,7262	0,76	0,5928	0,5972	0,6115
0,5283	-	0,6847	0,7237	0,78	0,5761	0,5800	0,5925
0,5398	0,6732	0,6845	0,7221	0,8	0,5573	0,5607	0,5715
0,54	0,6732	0,6845	0,7221	0,82	0,5362	0,5391	0,5484
0,56	0,6726	0,6832	0,7184	0,84	0,5125	0,5149	0,5227
0,58	0,6707	0,6807	0,7136	0,86	0,4859	0,4879	0,4942
0,6	0,6676	0,6769	0,7075	0,88	0,4558	0,4573	0,4624
0,62	0,6633	0,6719	0,7002	0,9	0,4214	0,4226	0,4264
0,64	0,6576	0,6656	0,6917	0,92	0,3816	0,3825	0,3852
0,66	0,6506	0,6579	0,6819	0,94	0,3345	0,3351	0,3369
0,68	0,6421	0,6488	0,6708	0,96	0,2764	0,2767	0,2777
0,7	0,6322	0,6383	0,6583	0,98	0,1977	0,1978	0,1982
0,72	0,6208	0,6263	0,6443	1	0	0	0
0,74	0,6077	0,6126	0,6287				

χ_m [1], ε_s [1]. Při prvních třech poměrech celkových tlaků ε_s dosahují průtokové faktory maximálních hodnot pro danou hodnotu κ.

Kritický tlakový poměr

Z rovnice pro průtok, respektive průběhu průtokové faktoru, vyplývá, že by s klesajícím tlakem za tryskou p_e měl hmotnostní tok plynu m růst pouze do určitého tlakového poměru ε_s, potom by měl průtok začít klesat, viz křivka 1-a-0 na Obrázku 5. Ve skutečnosti od poměru ε^*_s až do expanze do vakua (ε_s=0) je průtok konstantní a roven m^*, viz křivka a-b na Obrázku 5. Tlakový poměr, při kterém je dosažen maximální průtok plynu tryskou se nazývá kritický tlakový poměr (proto značka hvězdičky *). Rovnici pro kritický tlakový poměr lze odvodit z extrému Rovnice 3 pro průtok, viz Rovnice 5.



5: Maximální hmotnostní tok plynu tryskou
Odvození rovnice pro kritický tlakový poměr je uvedeno v Příloze 8.

Kritický tlakový poměr
Vodík
Vzduch
Pára

Kritický tlakový poměr je funkcí druhu plynu, protože poměr tepelných kapacit κ se u jednotlivých plynů liší. Hodnoty kritických tlakových poměrů pro ideální plyn lze odečíst z Tabulky 4, protože právě při nich dosahují hodnoty průtokového faktoru maximálních hodnot. Kritické tlakové poměry reálných plynů se mírně liší, například pro vodík je 0,527, suchý vzduch 0,528, přehřátou vodní páru 0,546, sytou vodní páru 0,577. Nicméně lze počítat s tím, že kritický tlakový poměr se pohybuje kolem hodnoty 0,5.

Bendemannova elipsa

Křivka 1-a-0 z Obrázku 5 je tvarem velice blízkou elipse, proto se v inženýrské praxi, pro zrychlení a zjednodušení výpočtu trysky, úsek 1-a často nahrazuje části elipsy, která se nazývá Bendemannovou elipsou, viz Rovnice 6, jejíž platnost je omezena na rozsah $p_e \geq p^*$.

$$\dot{m} \approx \dot{m}^* \sqrt{1-\frac{(p_e-p^*)^2}{(p_{is}-p^*)^2}}$$

6: Bendemannova elipsa
Odvození rovnice pro Bendemannovu elipsu je uvedeno v Příloze 9.

Kritická rychlost
Průtokový kužel trysky
Rychlost zvuku

Při kritickém nebo nižším tlakovém poměru dosahuje rychlost proudu v nejužším místě trysky rychlosti zvuku[3.], tento stav proudění se nazývá kritickým stavem. Dosazením kritického tlakového poměru (Rovnice 5) do Rovnice 1 a Rovnice 3 lze získat rovnice pro stanovení hodnot klíčových veličin pro nejužší místo trysky v případě dosažení nebo podkročení kritického tlakového poměru, viz Rovnice 7. Tyto veličiny se nazývají kritické (kritická rychlost, průtok, tlakový poměr...), přičemž v Tabulce 4 jsou nejvyšší uvedené hodnoty χ současně i χ_{max} pro dané κ. Grafické vyjádření závislosti průtoku na vstupním tlaku a protitlaku se nazývá průtokový kužel trysky [Škorpík, 2021, s. 42_32].

$$V^*=\sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}p_{is}v_{is}};\qquad \dot{m}^*=A^*\sqrt{\frac{p_{is}}{v_{is}}}\chi_{max};\qquad \chi_{max}=\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\sqrt{\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}}$$

$$h^*=h_{is}-\frac{V^{*2}}{2}$$

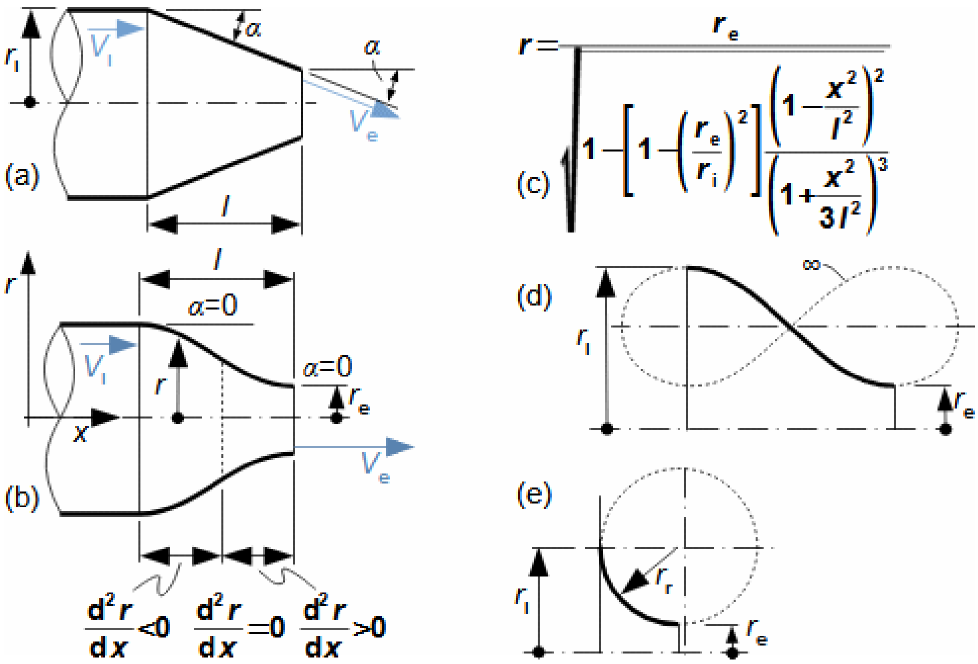
7: Rovnice pro kritický průtok tryskou

h^* [J·kg^{-1}] kritická entalpie (při izoentropické expanzi z celkového stavu dosahuje proudění při této entalpii kritické rychlosti, respektive rychlosti zvuku).

Tvary konvergetních trysek

Rychlostní pole

Obvyklé tvary zužujících se trysek jsou uvedeny na Obrázku 8. Tyto tvary lze aplikovat i na nekruhové kanály a lopatkové kanály. Ideální tvar trysky je plynulý, rovnoběžný s proudnicemi (na vstupu i výstupu, aby nedošlo ke vzniku turbulencí prudkou změnou směru proudění o stěnu) a takový, při kterém je dosaženo na výstupu rovnoměrné rychlostní pole. To znamená, že výstupní rychlost by měla být ve směru osy trysky, jak vyplývá z experimentů [Dejč, 1967, s. 319]. Tuto podmínku musí splňovat i proudnice blízko okraje trysky.



8: Vliv tvaru trysky na směr výstupní rychlosti

(a) kuželová tryska; (b) ideální tvar trysky; (c) Vitošinského tryska neboli Vitošinského konfuzor [Dejč, 1967, s. 320] (rovnice platí pro $l\geq 2\cdot r_e$); (d) tvar trysky jako lemniskáta ∞; (e) tvar trysek pro výtok z nádob ($r_r\approx 1{,}5\cdot r_e$ [Sutton and Biblarlz, 2010, s. 80]). l [m] délka trysky; r [m] poloměr trysky; x [m] osová souřadnice trysky.

Kuželová tryska

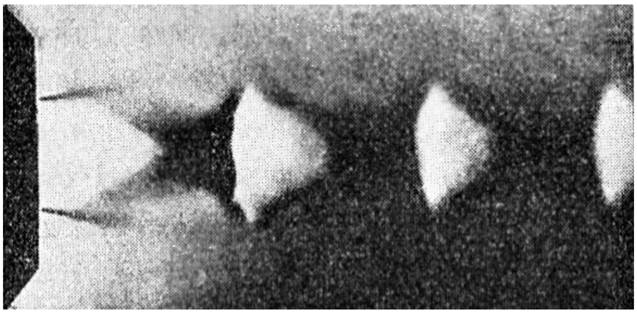
Lemniskáta

Aerodynamický tunel

Kuželové trysky jsou výrobně jednoduché, ale mají horší součinitele průtoku (viz kapitola Proudění tryskou se ztrátami) než trysky tvaru podle Obrázku 8(b). Nejrovnoměrnější rychlostní pole na výstupu mají trysky tvaru Vitošinského (Obrázek 8(c)) a trysky tvaru lemniskáty (Obrázek 8(d)) – takové tvary trysek se používají jako přestupní kanál mezi dvěma kanály a pro ofukovací trysky v aerodynamických tunelech.

Konvergentně-divergentní tryska (Lavalova tryska)

Jestliže tlak v okolí ústí konfuzorové trysky je nižší než kritický tlak, pak se v ústí trysky nastaví kritická (zvuková) rychlost a kritický tlak, takže plyn za tryskou dále expanduje a jeho rychlost se zvyšuje podle Rovnice 1 na nadzvukovou. Podle Hugoniotova teorému současně roste průtočný průřez takto vzniklého rychlého proudu plynu. Rozšiřující se proudový kanál vytváří na okrajích s okolním plynem šikmé rázové vlny[3.], které se odráží dovnitř proudu a snižují účinnost expanze, viz Obrázek 9, na kterém je výtok vzduchu z konvergentní trysky do tlaku nižšího než kritického. Po vyrovnání tlaku s okolím expanze ustává a následuje postupná termodynamická rovnováha stavu plynu s okolním plynem. Pro zlepšení účinnosti expanze plynu za kritickým průřezem trysky, tedy pro případ $p^{*}>p_{e}$, je třeba pro expandující plyn vytvořit vhodné podmínky, tj. vytvořit za nejužším průřezem trysky rozšiřující se kanál – taková konstrukce se nazývá konvergentně-divergentní tryska nebo také Lavalova tryska. Používaných tvarů K-D trysek je více a závisí na účelu použití, technologické náročnosti výroby a maximální požadované délce trysky. Nicméně délka trysky také ovlivňuje její provozní rozsah, protože při jiném než návrhovém stavu tj. nenávrhovém stavu v K-D trysce nebo jejím okolí vznikají efekty spojené s vysokou rychlostí.

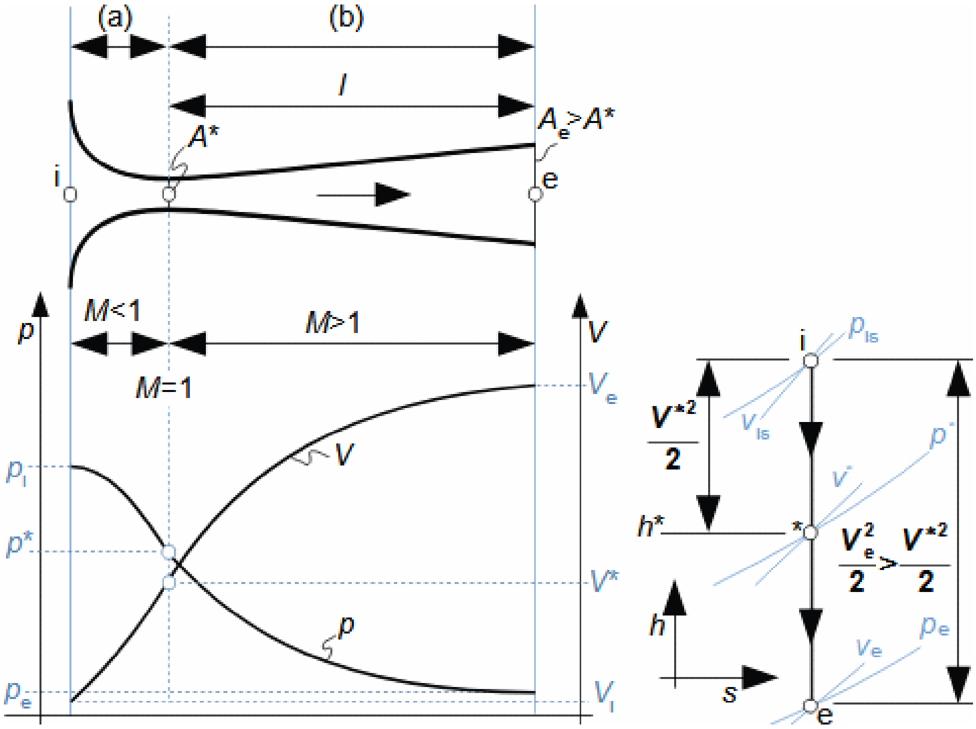


9: Výtok z trysky při kritickém tlakovém poměru
Obrázek z [Slavík, 1938, s. 5].

Charakteristika K-D trysky

Machovo číslo

Divergentní část trysky umožňuje plynulou expanzi plynu do nadzvukových rychlostí v trysce bez větších ztrát, viz Obrázek 10. Přičemž v konvergentní části trysky je rychlost proudu podzvuková M<1, v divergentní části nadzvuková M>1 a v hrdle mezi nimi rychlost zvuku M=1. h-s diagram K-D trysky má stejný tvar jako h-s diagram zužující se trysky na Obrázku 1, stejně tak platí i rovnice pro rychlost, akorát plyn při expanzi překonává kritické parametry.

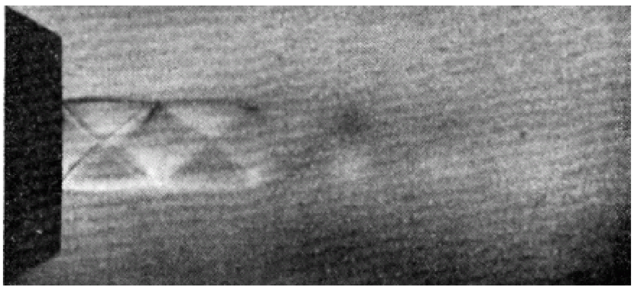


10: Konvergentně-divergentní tryska – průběh expanze

(a) konvergentní část trysky; (b) divergentní část trysky. M [1] Machovo číslo[3]; l [m] délka divergentní části trysky.

Výtok z K-D trysky

Výtoková rychlost K-D trysky je nadzvuková a při výtoku do volného prostoru začne proudění ihned vytvářet šikmé rázové vlny – brzdění nadzvukového proudu o okolní plyn, viz Obrázek 11.



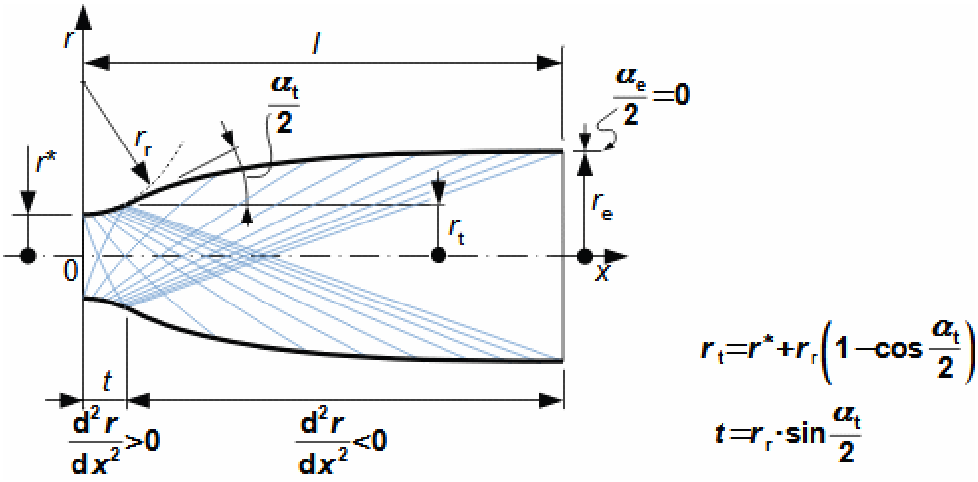
11: Nadzvukové výtok plynu z K-D trysky
Obrázek z [Slavík, 1938, s. 23].

Tvary divergentních trysek

Ideálním tvarem K-D trysky je tvar sestrojený tzv. metodou charakteristik, nicméně tento tvar je velmi náročný na výpočet i výrobu. Naopak nejjednodušším tvarem je kuželová tryska, zvonové trysky jsou zase obvyklé v raketové technice.

Metoda charakteristik
Rychlostní pole
Aerodynamický tunel

Tvar K-D trysek vymodelovaný metodou charakteristik (Obrázek 12) je ideálním tvarem. Trysky navržené touto metodou mají totiž rovnoměrné rychlostní pole na výstupu. Metoda charakteristik je založena na postupné konstrukci expanzních vln[3.], tyto vlny jsou na Obrázku 12 zakresleny modře. Okrajovou podmínkou této metody je zadaný počáteční poloměr r_r při α_e=0° (podmínka výstupní rychlosti v osovém směru) a průtočný průřez na výstupu A_e [Dejč, 1967, s. 341], [Sutton and Biblarlz, 2010, s. 79]. Nevýhodou je, že délka takové trysky je mnohem větší než trysky kuželové, takže v důsledku vnitřního tření může být její účinnost nižší než u kuželových trysek, proto se tento tvar trysek používá prakticky jen v nadzvukových aerodynamických tunelech, kde je rovnoměrné rychlostní pole na výtoku velmi důležité.

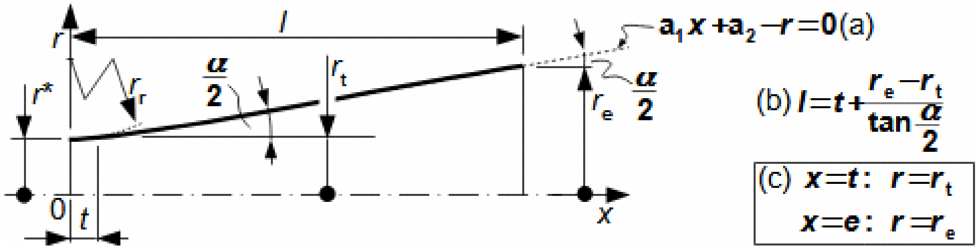


12: Ideální tvar divergentní trysky

α [°] úhel rozšíření trysky; t [m] vstupní délka rozšiřující se části trysky (obvykle kruhový obrys o poloměru $r_r \approx 0{,}382 \cdot r^*$ [Sutton and Biblarlz, 2010, s. 80]). Odvození rovnic pro r_t a t jsou uvedeny v Příloze 10.

Rovnice kuželové trysky
Injektor
Ejektor

Kuželový tvar K-D trysky je jejím nejjednodušším tvarem, viz Obrázek 13. Tyto trysky jsou charakteristické snadným výpočtem i výrobou, protože mají stálý úhel rozšíření. Používají se i jako statorové kanály jednostupňových turbín, v případech kdy jsou jiné ztráty tak vysoké, že není hospodárná výroba složitějšího tvaru. Tento tvar se používá i u malých raketových motorů, malých trysek, na injektorech[5.] a ejektorech[5.] a podobně. Nevýhodou tohoto tvaru trysky je, že nelze na výstupu dosahovat rovnoměrného rychlostní pole a odklon rychlosti od osy kanálu způsobuje ztrátu na hybnosti v osovém směru (při úhlu α=20° asi 1 % [Sutton and Biblarlz, 2010, s. 78]). Výpočet vychází ze zadaného úhlu rozšíření α, který bývá 8 až 30° a z vypočítaného průtočného průřezu na výstupu A_e. Tyto dva parametry stačí k výpočtu délky divergentní části trysky.

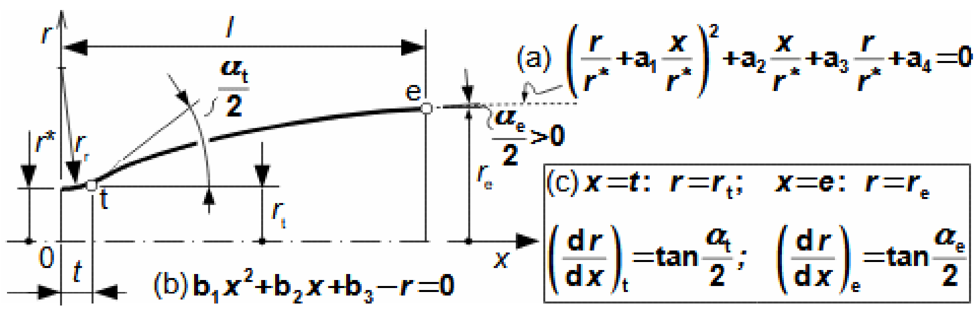


13: Lineární (kónický) tvar rozšiřující se části K-D trysky

(a) rovnice obrysu trysky; (b) rovnice pro délku trysky; (c) okrajové podmínky pro výpočet konstant a_1, a_2. Odvození rovnic pro výpočet délky kuželové K-D trysky jsou uvedeny v Příloze 11.

Rovnice zvonové trysky

Zvonová tryska je především tvarem trysek raketových motorů. Tvar této trysky je navržen buď podle rovnice Rao (podle G.V.R. Rao, který tuto rovnici sestavil na základě experimentů [Rao, 1958], [Meerbeeck et al., 2013]), nebo podle rovnice Allman-Hoffman (podle Allman J. G. a Hoffman J. D., kteří rovnici odvodili zjednodušením rovnice Rao [Allman and Hoffman, 1981]); obě rovnice jsou polynomy druhého stupně (paraboly), viz Obrázek 14. V případě okrajových podmínek pro rovnice Rao jsou výstupní a vstupní úhel na sobě závislé (α_t=f(α_e)). Výběr optimální dvojice vstupního α_t a výstupního úhlu α_e je možný z délky ekvivalentní kuželové trysky při α=30°, viz tabulky a grafy v [Sutton and Biblarlz, 2010, s. 80]. V případě rovnice Allman-Hoffman stačí k řešení pouze vstupní úhel α_t. Tryska navržená podle rovnice Allaman-Hoffman má asi o 0,2 % menší výstupní hybnost plynu v osovém směru při expanzi do vakua než tryska navržená podle rovnice Rao [Haddad, 1988], ale snadněji se s ní pracuje při hledání optimálního tvaru trysky při velkém množství kombinací vstupních parametrů pracovního plynu. Zvonová tryska je kratší než kuželová tryska, přesto má větší účinnost i hybnost v osovém směru.



14: Tvar zvonové trysky

(a) rovnice obrysu trysky podle Rao; (b) rovnice obrysu trysky podle Allman-Hoffman; (c) okrajové podmínky pro výpočet konstant a_1..a_4 nebo b_1..b_3.

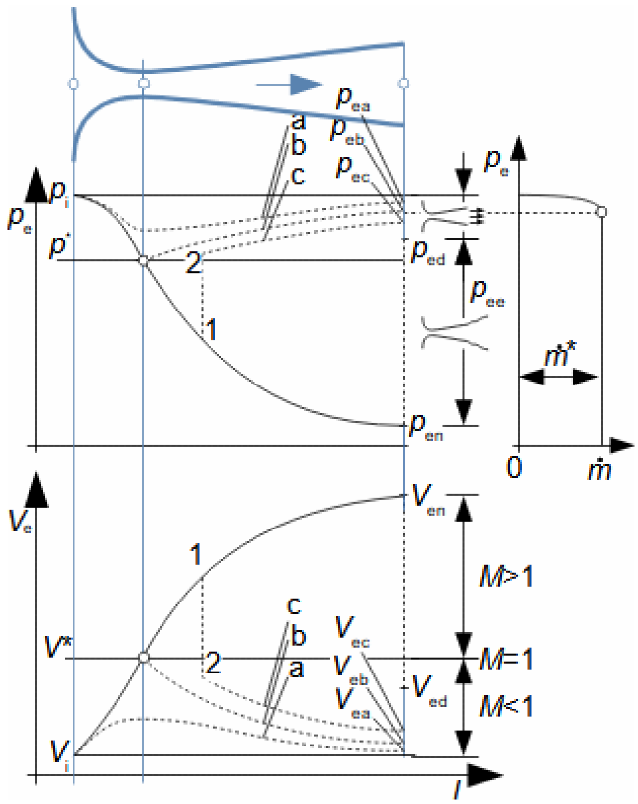
Nenávrhový stav trysky

U správně navržené K-D trysky dosáhne v ústí trysky tlak proudící tekutiny právě tlaku $p_{e,n}$ (návrhový tlak). Nenávrhovým stavem trysky je tedy myšlen stav, kdy se mění vstupní parametry plynu nebo výstupní parametry plynu nebo oba parametry najednou. Tyto parametry se mohou měnit z různých příčin (regulace průtoku tryskou apod). Celkem mohou nastat dva základní případy nenávrhových stavů K-D trysky a to přeexpandovaný stav a podexpandovaný stav.

Přeexpandovaná tryska

Kolmá rázová vlna

Jestliže tlak na výstupu z trysky p_e je vyšší než návrhový tlak p_{en}, pak hovoříme o tom, že tryska je přeexpandovaná (tryska byla navržena na "delší" expanzi, než je skutečnost). Přeexpandovaná tryska může mít jeden z pěti možných provozních stavů popsaných na Obrázku 15 případy a až e, respektive protitlaky $p_{e,a}$ až $p_{e,e}$. Přičemž případy c až e jsou charakteristické tím, že vznikají kolmé rázové vlny[3]. podle protitlaku, buď v trysce, na jejím okraji (případ e) a nebo až za tryskou. Vznik rázových vln při těchto nenávrhových protitlacích lze predikovat z Hugoniotova teorému. Rázová vlna v trysce nebývá stabilní [Dejč, 1967, s. 363] a může proto vyvolávat vibrace trysky a přilehlých částí dalších strojů, navíc podstatně zvyšuje hlučnost. Při hledání polohy vzniku kolmé rázové vlny v trysce, lze vycházet z Rankine-Hugoniotových rovnic[3]., viz Úloha 4.



15: K-D tryska – charakter proudění při změně protitlaku
Index $_1$ označuje stav před rázovou vlnou; $_2$ za rázovou vlnou.

Podexpandovaná tryska

Jestliže tlak na výstupu p_e je nižší než návrhový tlak p_{en}, pak hovoříme o tom, že tryska je podexpandovaná (tryska byla navržena na "kratší" expanzi, než je skutečnost). V případech, kdy je protitlak nižší než návrhový, bude expanze za tryskou dále pokračovat, podobně jako v případě obyčejné trysky.

Protitlak raketového motoru

Kritický průřez trysky

Změna protitlaku se projevuje i na konstrukci trysek raketových motorů. Během letu rakety v atmosféře se mění podle výšky vnější tlak, proto jsou trysky prvního stupně navrženy na expanzi do tlaku atmosférického (při zemi) a stupně následujícího na tlak mnohem nižší. Poslední stupeň je navržen pro expanzi do vakua [Tomek, 2009]. Čím větší rozsah tahu nabízí raketový motor, tím více musí být jeho tryska podexpandována. Při kolmém přistání rakety s málo podexpandovanou tryskou, proto musí být velmi přesný výpočet zážehu přistávacího motoru, protože jeho tah je de facto konstantní, takže zrychlení rakety a tah motoru se musí rovnat právě při dotyku se zemí.

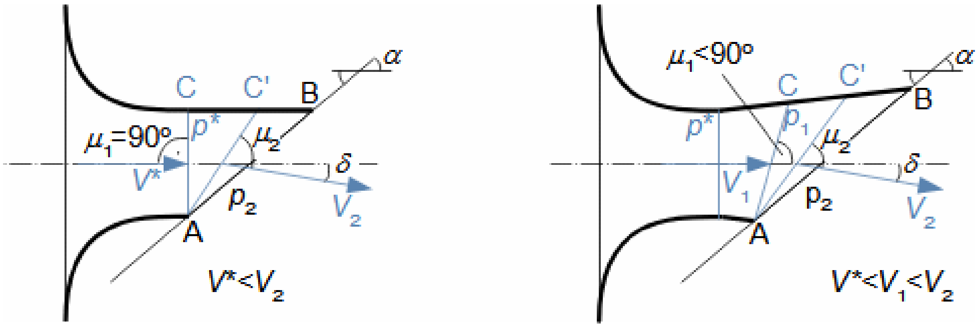
Proudění v šikmo seříznuté trysce

Expanzní vlny

Prandtl-Meyerovy funkce

Machův úhel

Při nadzvukovém proudění v šikmo seříznuté trysce dochází k odklonu proudu od osového směru v důsledku expanzní vlny, která vzniká na hraně kratší strany trysky, viz Obrázek 16. Situace u šikmo seříznuté K-D trysky je totožná s obtékáním tupého úhlu nadzvukovou rychlostí. Expanze plynu z tlaku p_1 započne na linii A-C a dokončí se na linii A-C', na které se nastaví tlak p_2. Šikmo seříznutá K-D tryska není tedy tak citlivá na změnu protitlaku jako neseříznutá K-D tryska. Postup výpočtu úhlu δ je uveden např. v [Kadrnožka, 2004, Rovnice 3.6-10] nebo lze použít i Prandtl-Meyerovy funkci[3].



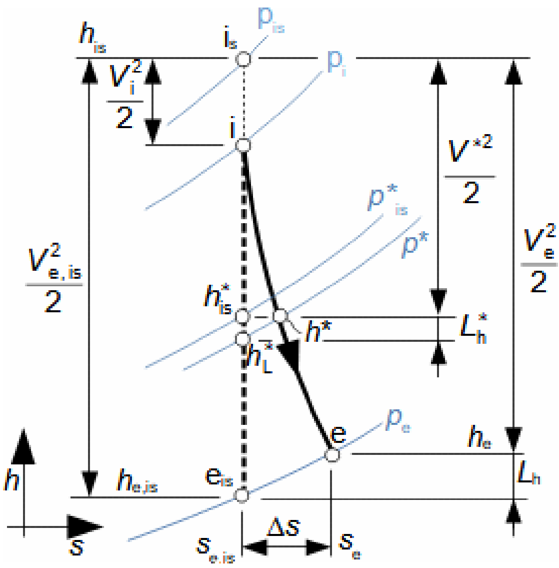
16: Šikmo seříznutá tryska – situace při kritickém proudění v nejužším průřezu vpravo-konvergentní tryska; vlevo-konvergentně-divergentní tryska. α [°] úhel seříznutí trysky; μ [°] Machův úhel[3]; δ [°] odklon proudu od osy trysky.

Proudění tryskou se ztrátami

Pomineme-li nenávrhové stavy v trysce, pak ztráty, které v tryskách vznikají jsou způsobené zejména vnitřním třením plynu. Mimo termodynamické ztráty dochází ještě ke snížení průtoku kvůli kontrakcí proudu za nejužším průřezem trysky.

Vnitřní tření
Disipace energie
h-*s* diagram trysky
Škrcení

Vnitřní tření[7.] plynu a tření o stěny trysky způsobují disipaci energie ve formě třecího tepla, což zvyšuje entropii plynu a snižuje tak výslednou kinetickou energii plynu, viz Obrázek 17. Navíc se v proudu mohou vyvinout víry, ve kterých dochází k nežádoucím transformacím energie na stejném principu jako při škrcení[6.], což také vede na zvyšování entropie.



17: Proudění v trysce se ztrátami

L_h [J·kg^{-1}] měrná ztráta v trysce. Index $_{is}$ označuje stav plynu pro případ izoentropické expanze.

Kritická rychlost
Rychlostní profil

Při proudění ze ztrátami se v trysce vytváří rychlostní profil, takže při tlaku p^*_{is} může nastat v jádru proudu rychlost zvuku přičemž na okrajích (v blízkosti stěn) je rychlost podzvuková a střední rychlost v hrdle trysky je menší, než je rychlost zvuku, respektive střední kinetická energie plynu je nižší, než odpovídá energii při rychlosti zvuku. Až při tlaku p^*, který je nižší než je p^*_{is}, je střední kinetická energie plynu taková, že odpovídá rychlosti zvuku v celém průtočném průřezu plynu. Navíc, jestliže v kritickém bodě h^* má plyn jiné termokinetické vlastnosti než v bodě h^*_{is}, pak kinetická energie rychlosti zvuku bude jiná než při izoentropické expanzi. To znamená, že se změní i entalpie $h^*\neq h^*_{is}$, ale tyto rozdíly mezi uvedenými body jsou velmi malé.

Účinnost trysky
Rychlostní součinitel

Ztrátu lze vypočítat z energetických parametrů trysky, kterými jsou rychlostní součinitel φ a účinnost trysky η, tyto dvě veličiny jsou definovány Rovnicí 18.

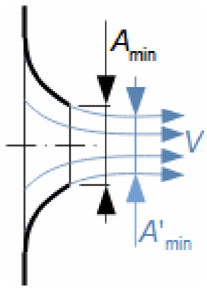
$$\varphi=\frac{V_e}{V_{e,is}};\quad \eta=\frac{h_{is}-h_e}{h_{is}-h_{e,is}}=\frac{V_e^2}{V_{e,is}^2}=\varphi^2$$

18: Energetické parametry trysky

φ [1] rychlostní součinitel; η [1] účinnost trysky. Hodnoty rychlostního součinitele φ pro trysky jsou uvedeny v [Dejč, 1967, s. 328] pro zužující se trysky a v [Dejč, 1967, s. 348] pro K-D trysky.

Kontrakce proudu
Vena contracta

Hmotnostní tok tryskou se může snížit nejen v důsledku vnitřního tření v tekutině, ale i v důsledku zúžení neboli kontrakce proudu (vena contracta) za hrdlem trysky [Jarkovský, 1958 s. 14]. Toto zúžení je způsobeno setrvačností proudu a působením okolí a má stejný dopad na průtok jako zmenšení průtočného průřezu trysky, viz Obrázek 19. U dobře provedených trysek je zúžení proudu velmi malé ($A_{min}\approx A'_{min}$), naopak významné je u clon.



19: Zúžení proudu v trysce

A'_{min} [m^2] průtočný průřez ve zúžení proudu.

Součinitel průtoku tryskou

Skutečný průtok tryskou se vypočítá pomocí součinitele průtoku, který zahrnuje vliv vnitřního tření i zúžení proudu. Součinitel průtoku je definován jako podíl skutečného průtoku tryskou ku průtoku při izoentropické expanzi bez zúžení proudu, viz Rovnice 20. Hodnoty průtokových součinitelů některých typů trysek a clon jsou uvedeny v [Dejč, 1967], [Jarkovský, 1958].

$$\mu=\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{is}}$$

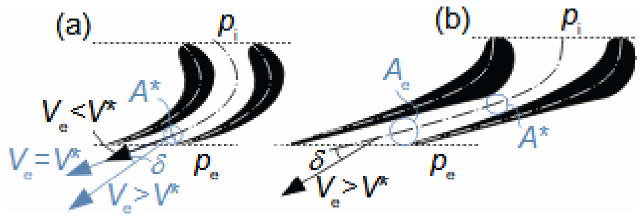
20: Součinitel průtoku

μ [1] součinitel průtoku; $\dot{m}_{is}$ [kg·s^{-1}] průtok tryskou při při proudění beze ztrát.

Tryska jako lopatkový kanál

Lopatkový kanál
Deviační úhel

Lopatkový kanál může mít tvar čistě konvergentní trysky i konvergentně-divergentní trysky. Takový lopatkový kanál se chová jako šikmo seříznutá tryska, viz Obrázek 21. Lopatkové kanály ve tvaru K-D trysky jsou používány v případech, kdy na jeho výstupu musí být nadzvuková rychlost pracovního plynu – například se používají u malých jednostupňových turbín a u posledních stupňů parních kondenzačních turbín.



21: Situace na výstupu z lopatkové mříže při nadzvukovém proudění

(a) konfuzorový lopatkový kanál; (b) lopatkový kanál pro nadzvukové rychlosti. δ [°] odklon nadzvukového proudu od osy kanálu, respektive zvětší deviačního úhlu lopatkové mříže.

Průtok skupinou trysek, stupňů turbín a Stodolovo pravidlo

Průtok turbínou

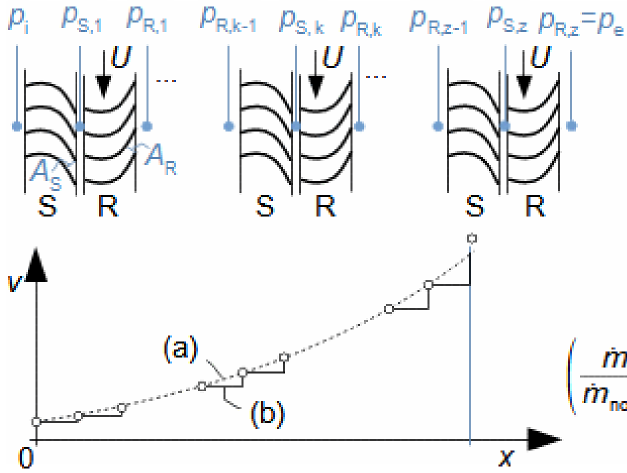
Teorie trysek se využívá i pro stanovení průtoku skupinou stupňů turbín za změněných podmínek před či za touto skupinou stupňů. Existuje hned několik výpočtových postupů (např. v [Ambrož, et al., 1956], [Kadrnožka, 1987]), které ovšem byly vytlačeny numerickými výpočty. Proto si zde popíšeme pouze postup nejjednodušší, který má smysl používat při přibližných výpočtech, viz aplikace v článku Parní turbína v technologickém celku [Škorpík, 2011].

Trysky do série
Lopatkový kanál
Stupeň turbíny

Lopatkové kanály jednoho stupně turbíny jsou tvořeny statorovou a rotorovou řadou lopatek, přičemž ta rotorová je umístěna na hřídeli, která se otáčí, viz Obrázek 22 a článek Úvod do lopatkových strojů [Škorpík, 2022]. Lopatkové kanály v těchto řadách lze přirovnat ke dvou tryskám pracující v sérii, což znamená, že se jedná o trysky se stejným průtokem. Stejný předpoklad lze aplikovat i na skupinu s více stupni, respektive na více trysek řazených za sebou.

Exponent polytropy
Měrný objem

Uspokojivého výsledku přibližného výpočtu změny průtoku větší skupinou stupňů lze dosáhnout při zavedení dvou zjednodušujících předpokladů. Prvním je předpoklad adiabatické expanze a její konstantní hodnota exponentu polytropy i při změně průtoku. Druhým předpokladem je zjednodušení postupné změny měrného objemu plynu ve stupni na změnu skokovou, při které se měrný objem mění skokově vždy na výstupu z lopatkového kanálu, viz Obrázek 22.



$$\left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{nom}}\right)^2 \approx \frac{p_i}{v_i}\frac{v_{i,nom}}{p_{i,nom}}\frac{1-\left(\frac{p_e}{p_i}\right)^{\frac{n+1}{n}}}{1-\left(\frac{p_{e,nom}}{p_{i,nom}}\right)^{\frac{n+1}{n}}}$$

22: Vzorec pro přibližný výpočet změny průtoku velkou skupinou stupňů turbíny

(a) průběh změny měrného objemu ve vícestupňové turbíně; (b) změna měrného objemu ve vícestupňové turbíně podle zjednodušujícího předpokladu. R-označení rotorové řady lopatek; S-označení statorové řady lopatek. n [-] exponent polytropy proudění skupinou stupňů; x [m] délka vyšetřované skupiny stupňů. Indexy: i-stav na vstupu do vyšetřované skupiny stupňů; k-tý stupeň turbíny; nom-jmenovitý stav; z-počet stupňů turbíny. Odvození rovnice pro přibližný výpočet změny průtoku velkou skupinou stupňů turbíny je uvedeno v [Ambrož, et al., 1956, s. 315].

Bendemanova elipsa

Obecná Rovnice 22 má tu nevýhodu, že její řešení je velmi pracné v podobě iteračního výpočtu, do kterého vstupují odhady hodnot výstupních stavových veličin s hledáním kořene polynomu s obecným (necelým) exponentem. Řešením je zjednodušení Rovnice 22 použitím Bendemannovy elipsy na Rovnici 23. Řešení Rovnice 23 vede na snadnější hledaní kořene kvadratické rovnice.

$$\left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{nom}}\right)^2 \approx \frac{p_{i,nom}\cdot v_{i,nom}}{p_i\cdot v_i}\frac{p_i^2-p_e^2}{p_{i,nom}^2-p_{e,nom}^2}$$

23: Vzorec pro přibližný výpočet změny průtoku velkou skupinou stupňů turbíny odvozený z Bendemannovy elipsy

Odvození je uvedeno v [Kadrnožka, 1987, s. 181].

Kritický tlakový poměr

Jestliže na poslední lopatkové řadě skupiny stupňů nastane kritický tlakový poměr, pak lze na tuto skupinu stupňů aplikovat poznatky pro kritický průtok tryskou. To znamená, že rovnice pro průtok by měla být stejná, jako když se jedná o výtok do vakua ($p_e=0$), viz Rovnice 24.

$$\left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{nom}}\right)^2 \approx \frac{p_i}{v_i}\frac{v_{i,nom}}{p_{i,nom}}$$

24: Průtok skupinou stupňů při kritickém tlakovém poměru na poslední lopatkové řadě

Odvozeno z Rovnice 23 pro expanzi do vakua $p_e=0$.

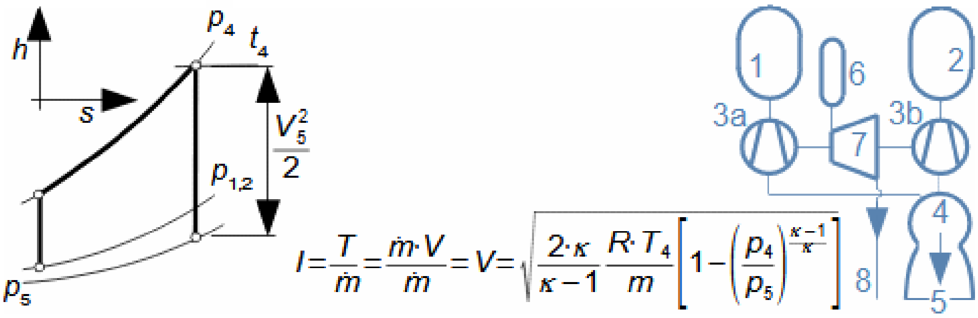
Stodolovo pravidlo

Uvedené rovnice pro průtok skupinou trysek poprvé odvodil Auler Stodola, a proto se označují jako Stodolovo pravidlo.

Tryska raketového motoru

Raketový motor
Specifický impuls
Palivo
Okysličovadlo
Vodík
Kyslík

Tah raketového motoru je roven hybnosti proudu výstupních spalin. Hlavní částí motoru je spalovací komora a na ni navazující K-D tryska. Ve spalovací komoře hoří okysličovadlo a palivo, tak vznikají spaliny, které expandují v trysce. Požadavkem na raketové palivo je, aby rychlost spalin byla co největší, protože to je způsob jak dosáhnout co nejvyššího poměru tahu ku spotřebě paliva (tento poměr se nazývá specifický impuls, viz Obrázek 25). Z úpravy rovnice pro rychlost spalin na výstupu z trysky je zřejmé, že jako palivo pro raketové motory jsou vhodné látky s vysokou teplotou hoření a malou molovou hmotností (například vodík, který má teplotu hoření s kyslíkem t_{H2O}=3244 °C při molové hmotnosti m_{H2O}=18 kg·mol^{-1}).



25: Raketový motor na kapalné palivo a výpočet rychlosti výtoku spalin

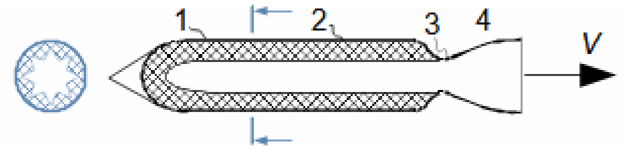
Raketový motor na kapalné palivo a výpočet rychlosti výtoku spalin: 1-okysličovadlo; 2-palivo; 3a-turbočerpadlo okysličovadla; 3b-turbočerpadlo paliva; 4-spalovací komora; 5-výstup spalin z K-D trysky; 6-zdroj horkých plynů pro turbínu (u jiných motorů může být palivem pro turbínu palivo raketového motoru); 7-turbína; 8-výfuk turbíny. T [N] tah; R [J·mol^{-1}·K^{-1}] univerzální plynová konstanta; m [kg·mol^{-1}] molová hmotnost spalin.

Motor SSME

Výkon raketového motoru je pak dán tlakem ve spalovací komoře a její velikostí. Například požadovaný tlak ve spalovací komoře motoru SSME raketoplánu Space shuttle byl 20,3 MPa a výkon turbíny turbočerpadla vodíku dosahoval 56 MW, při tahu 2278 kN [Růžička and Popelínský, 1986, s. 25], [Sutton and Biblarlz, 2010].

Raketové motory na tuhé látky

Existují i raketové motory na tuhá paliva (TPL), ve kterých probíhá postupné odhořívání palivové směsi za vzniku velmi horkých spalin (Obrázek 26). Vektor tahu se u motorů s TPL často reguluje pomocí šikmé rázové vlny řízeně vznikající vstřikováním kapaliny na vnitřní stranu trysky. Hvězdičkový průřez náplně paliva umožňuje postupné odhořívání palivové směsi a stabilní hoření. Tento hvězdicový tvar byl soustavně vyvíjen za druhé světové války v Anglii a vyvrcholil konstrukci balistické rakety na TPL typu Sergant [Holt, 2017, s. 94-110].



26: Raketový motor na tuhá paliva
1-spalovací komora; 2-směs paliva a okysličovadla; 3-kritický průřez trysky; 4-K-D tryska.

Okysličovadlo u TPL

Nevýhodami motorů s TPL jsou omezená možnost regulace tahu a motor lze zažehnou jen jednou. Na druhou stranu jsou jednodušší než motory na kapalná paliva a především pohotovější (odpadá tankování paliva před startem) a mají i výrazně vyšší životnost při skladování, což je důležité pro vojenské využití. Existují i hybridní raketové motory, kde palivo je v tuhé formě a okysličovadlo je přiváděno z externí nádrže, tímto způsobem lze lépe regulovat tah. Motory na TPL lze také opakovaně používat, například první stupně raketoplánu Space shutle, tzv. motory SRB.

Úlohy

Úloha 1:

Konvergentní tryska
Rychlost v trysce
Hmotnostní tok

Vzduch o počáteční rychlosti 250 m·s^{-1}, tlaku 1 MPa a teplotě 350 °C protéká tryskou do prostředí o tlaku 0,25 MPa. Určete: (a) zda nastane kritické proudění, (b) rychlost na výtoku a (c) protékající množství vzduchu tryskou. Výstupní průřez trysky je 15 cm^2. Vlastnosti vzduchu: C_p=1,01 kJ·kg^{-1}·K^{-1}, r=287 J·kg^{-1}·K^{-1}, κ=1,4. Neřešte proudění za výtokem z trysky. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 1.

Úloha 2:

Konvergentně-divergentní tryska

Navrhněte divergentní část trysky (kuželový tvar) k trysce navržené v Úloze 1. Určete Machovo číslo na výstupu z trysky. Úhel rozšíření trysky je 10°. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 2.

Úloha 3:

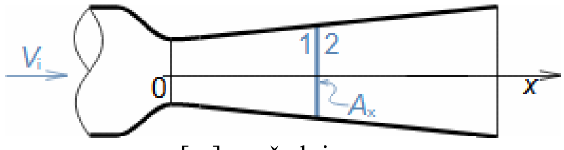
Konvergentně-divergentní tryska

K-D tryskou kuželového tvaru proudí pára. Tlak a teplota páry na vstupu do trysky je 80 bar, respektive 500 °C, tlak na výstupu z trysky je 10 bar. Tryskou má vytékat 0,3 kg·s^{-1} páry. Stanovte rozměry rozšiřující se části trysky. Jaká je kvalita páry na konci expanze – přehřátá pára/sytá pára/mokrá pára? Úhel rozšíření divergentní části trysky α=10°. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 3.

Úloha 4:

Přeexpandovaná tryska
Rázová vlna

Určete přibližné místo vzniku kolmé rázové vlny v K-D trysce z Úlohy 2, respektive Úlohy 1, jestliže se tlak na výstupu z trysky zvýší o 0,55 MPa. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 4.



x [m] souřadnice osy x.

Úloha 5:

Divergentní tryska

Účinnost trysky

Navrhněte rozměry divergentní trysky kuželového tvaru, kterou protéká sytá vodní pára. Průtok tryskou má být 0,2 kg·s^{-1}. Celkový tlak páry před tryskou je 200 kPa. Tlak páry za tryskou je 20 kPa. Rychlostní součinitel trysky je 0,95. Vypočítejte také účinnost této trysky. Řešení úlohy je uvedeno v Příloze 5.

Odkazy

ŠKORPÍK, Jiří, 2011, Parní turbína v technologickém celku, *Transformační technologie*, Brno, [on-line], ISSN 1804-8293. Dostupné z https://www.transformacni-technologie.cz/25.html.

ŠKORPÍK, Jiří, 2019, Technická termomechanika, *Transformační technologie*, Brno, [on-line], ISSN 1804-8293. Dostupné z https://www.transformacni-technologie.cz/43.html.

ŠKORPÍK, Jiří, 2021, Technická matematika, *Transformační technologie*, Brno, [online], ISSN 1804-8293. Dostupné z https://www.transformacni-technologie.cz/42.html.

ŠKORPÍK, Jiří, 2022, Úvod do lopatkových strojů, *Transformační technologie*,https://turbomachinery.education/uvod-do-lopatkovych-stroju.html, ISSN 1804-8293.

ALLMAN, J. G., HOFFMAN, J. D., 1981, Design of maximum thrust nozzle contours by direct optimization methods, *AIAA journal*, Vol. 9, Nb 4, pp. 750-751.

AMBROŽ, Jaroslav, BÉM, Karel, BUDLOVSKÝ, Jaroslav, MÁLEK, Bohuslav, ZAJÍC, Vladimír, 1956 *Parní turbíny II, konstrukce, regulace a provoz parních turbín*, SNTL, Praha.

DEJČ, Michail, 1967, *Technická dynamika plynů*, SNTL, Praha.

HADDAD, A., 1988, *Supersonic nozzle design of arbitrary cross-section*, Cranfield institute of technology, School of Mechanical Engineering.

HOLT, Nathalia, 2017, *Vzestup raketových dívek: ženy, které nás hnaly kupředu: od raketových střel k Měsíci a Marsu.*, Knihy Omega, Praha, ISBN 978-80-7390-686-3.

JARKOVSKÝ, Eduard, 1958, *Základy praktického výpočtu clon, dýz a trubic Venturiho*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha.

KADRNOŽKA, Jaroslav, 1987, *Parní turbíny a kondenzace*, VUT v Brně, Brno.

KADRNOŽKA, Jaroslav, 2004, *Tepelné turbíny a turbokompresory I*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, ISBN 80-7204-346-3.

KALČÍK, Josef, SÝKORA, Karel, 1973, *Technická termomechanika*, Academia, Praha.

MAREŠ, Radim, ŠIFNER, Oldřich, KADRNOŽKA, Jaroslav, 1999, *Tabulky vlastností vody a páry, podle průmyslové formulace IAPWS-IF97*, VUTIUM, Brno, ISBN 80-2141316-6.

MEERBEECK, W.B.A., ZANDBERGEN, B.T.C., SOUVEREIN, L.J., 2013, A Procedure for Altitude Optimization of Parabolic Nozzle Contours Considering Thrust, Weight and Size, *EUCASS 2013 5th European Conference for Aeronautics and Space Sciences*, Munich.

NOŽIČKA, Jiří, 2000, Osudy a proměny trysky Lavalovy, *Bulletin asociace strojních inženýrů*, č. 23, ASI, Praha.

RAO, G. V. R., 1958, Exhaust nozzle contour for optimum thrust, *Jet Propulsion*, Vol. 28, Nb 6, pp. 377-382.

REKTORYS, Karel, CIPRA, Tomáš, DRÁBEK, Karel, FIEDLER, Miroslav, FUKA, Jaroslav, KEJLA, František, KEPR, Bořivoj, NEČAS, Jindřich, NOŽIČKA, František, PRÁGER, Milan, SEGETH, Karel, SEGETHOVÁ, Jitka, VILHELM, Václav, VITÁSEK, Emil, ZELENKA, Miroslav, 2003, *Přehled užité matematiky I, II*, Prometheus, spol. s.r.o., Praha, ISBN 80-7196-179-5.

RŮŽIČKA, Bedřich, POPELÍNSKÝ, Lubomír, 1986, *Rakety a kosmodromy*, Naše vojsko, Praha.

SLAVÍK, Josef, 1938, *Modifikace Pitotova přístroje a jeho užití při proudění plynu hubicí*, Elektrotechnický svaz Československý, Praha.

SUTTON, George, BIBLARLZ, Oscar, 2010, *Rocket propulsion elements*, John Wiley& Sons, New Jersey, ISBN: 978-0-470-08024-5.

TOMEK, Petr, 2009, Kde jsou ty (skutečné) kosmické lodě?. *VTM Science*, vol. 1/2009, Mladá fronta a.s., Praha, ISSN 1214-4754.